Über das Potential eines Quellringes

und seine Verwendung zur Berechnung der Strömung in Düsen von Becherturbinen

Von Dipl.-Ing. Justin Kleinwächter

Druck von Ferd. Peter Nachf.
Leipzig 1929

Über das Potential eines Quellringes und seine Verwendung zur Berechnung der Strömung in Düsen von Becherturbinen

---

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur
Erteilung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte
Dissertation

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Justin Kleinwächter
aus Groß-Wartenberg

Referent:
Prof. Dr. Schmeidler

Korreferent:
Prof. Dipl.-Ing. Krauß

Tag der mündlichen Prüfung: 25. November 1927

LEIPZIG
Buchdruckerei Ferdinand Peter Nachf.
1929

In vorliegender Arbeit wird ein räumliches rotations-symmetrisches Strömungsproblem behandelt. In Abschnitt I werden die hydrodynamischen Grundgleichungen für den Fall der Rotationssymmetrie abgeleitet, in Abschnitt II wird auf einige Beispiele dafür, auf punktförmige Quellen und auf Streckenbelegung eingegangen. Das folgende Kapitel bringt die Ableitung und Berechnung der Potential- und der Stromfunktion für einen mit Elementarquellen kontinuierlich belegten Kreisring, den Quellring, während im 4. Abschnitt eine Überlagerung der Strömung eines solchen Ringes mit einer Parallel-Strömung untersucht wird. Dabei ergibt sich, daß auf diese Weise die Strömung in einem sich verengenden Rohre beschrieben werden kann. Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse der ersten Kapitel benutzt, um den Strömungsverlauf in Düsen von Becherturbinen zu erfassen. Dies geschieht durch Überlagerung der Quellringströmung und derjenigen einer Quellen- und Senkenkombination mit einer Parallelströmung. Es werden sechs verschiedene Düsenformen und der Druckverlauf in ihnen angegeben, wobei sich ergibt, daß die so ermittelten Drücke durchweg größer sind, als die nach einem in der Praxis üblichen Näherungsverfahren errechneten.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545807_0090

I. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Eine Flüssigkeitsströmung kann man beschreiben, wenn man in jedem Punkte des Raumes und zu jeder Zeit Größe uud Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ angeben kann. Ist dieser Vektor von der Zeit unabhängig, ist also $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = o$, so spricht man von einem „stationären" Strömungszustand; in diesem Falle sind $\mathfrak{v}$ und die drei nach den Koordinatenrichtungen ξ, η, ζ genommenen Komponenten von $\mathfrak{v}$ (u, v, w) lediglich abhängig vom Ort, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \mathfrak{v}(\xi, \eta, \zeta) \\ u &= u(\xi, \eta, \zeta) \\ v &= v(\xi, \eta, \zeta) \\ w &= w(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}$$

Handelt es sich außerdem um eine „wirbelfreie Strömung" eines inkompressibilen Mediums, dann besitzt sie ein Geschwindigkeitspotential Φ (ξ, η, ζ). Es gilt dann bekanntlich $\mathfrak{v} = \text{grad } \Phi$, oder ausführlicher geschrieben

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

wobei Φ ebenfalls eine Ortsfunktion, also $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \zeta)$ ist. Wegen der Inkompressibilität genügt diese Potentialfunktion der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta \Phi = o$ außerhalb etwa vorhandener Quellen, also der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = o.$$

Es sei nun eine Raumströmung vorgelegt, die rotationssymmetrisch in bezug auf irgendeine Achse, z. B. die x-Achse, sei. Dies bedeutet, daß für alle Punkte, die gleichen Abstand von der Symmetrieachse haben und in einer Normalebene zu ihr liegen, die Geschwindigkeitsvektoren in ihnen bei Drehung um die Rotationsachse in sich übergehen. Es genügt dann, den Strömungsvorgang in einer die Rotationsachse enthaltenden Ebene zu betrachten. Damit erkennen wir, daß wir bei einer derartigen rotationssymmetrischen Strömung ein zweidimensionales Problem vor uns haben. Wir wollen den Abstand eines Punktes von der Achse mit y und die in dieser Richtung genommene Geschwindigkeitskomponente mit v bezeichnen, während diejenige in der x-Richtung u sei. (y hat also jetzt die Bedeutung des Radius und v ist die radiale Geschwindigkeitskomponente). Die Potentialfunktion ist nunmehr eine Funktion von nur zwei unabhängigen Veränderlichen, $\Phi = \Phi(x, y)$. Die oben angegebene allgemeine Laplace'sche Differen-

tialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = o$ können wir nun in unserem speziellen Falle mit Hilfe der Gleichungen

$$\xi = x \qquad \eta^2 + \zeta^2 = y^2$$

transformieren, wobei wir über die Relationen

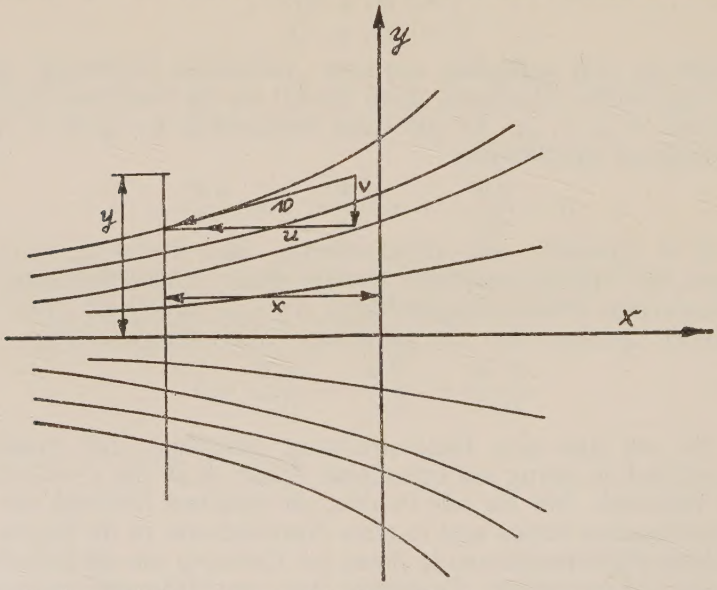
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\eta^2}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(1 - \frac{\eta^2}{y^2}\right); \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\zeta^2}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(1 - \frac{\zeta^2}{y^2}\right)$$

auf die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = o$$

kommen. Dieser Gleichung muss jetzt unsere Potentialfunktion



$\Phi(x, y)$ der rotationssymmetrischen Strömung genügen. Durch partielle Ableitung ergeben sich aus Φ wieder die Geschwindigkeitskomponenten

$$(2) \qquad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Bezeichnen wir nach Stokes mit $2\pi\Psi$ den Fluss, der durch eine Kreisfläche mit dem Radius y hindurchströmt, so erkennen wir, daß dieser Fluss abhängig ist von der Länge des Radius y und der zugehörigen Stelle x. Der Fluss ist also eine Funktion von x und y, d. h. es gilt $\Psi = \Psi(x, y)$. $\Psi(x, y)$ wollen wir die „Strom-

funktion“ nennen. Berechnen wir den Fluss, so erhalten wir

$$2\pi\Psi = 2\pi \int_{o}^{y} u \cdot y\, dy;$$

damit ist Ψ also eindeutig definiert durch das bestimmte Integral

$$\Psi = \int_{o}^{y} u \cdot y\, dy.$$

Die Flächen $\Psi(x, y) = \text{constans}$ heißen die Stromflächen. Alle auf ihnen befindlichen Stromlinien liegen gleichzeitig wegen der Rotationssymmetrie auf einer die Symmetrieaxe enthaltenden Ebene; das Gleiche gilt von den Pontentialflächen und den Pontentiallinien. Ist $\mathfrak{v} = (u, v)$ der Geschwindigkeitsvektor eines Elementes der Stromlinie $\Psi = c$ im Augenblicke des Durchflusses durch die Kreisfläche, so ist der Richtungstangens von $\mathfrak{v}$ offenbar

$$\frac{v}{u} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}};$$

aus der Definitionsformel (3) folgt durch Differentiation $u = \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und damit $v = -\frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Wir erhalten also

$$u = \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (4)$$

und nach nochmaliger Differentiation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -y\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = y\frac{\partial u}{\partial y} + u;$$

mit $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ erhält man daraus

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = u = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

und somit die Differentialgleichung, der Ψ genügt:

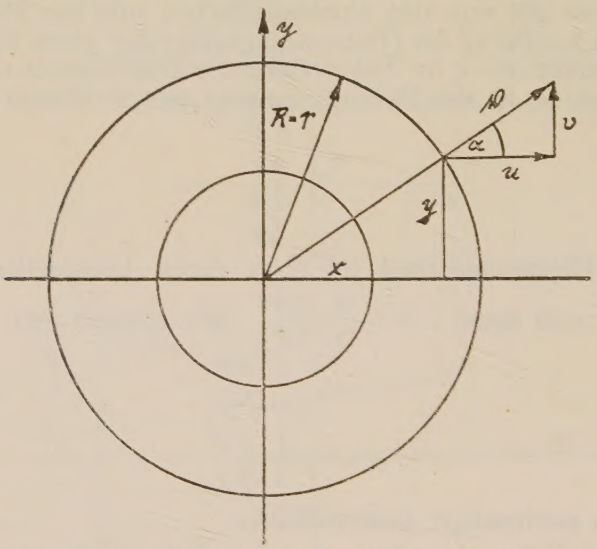
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = o, \qquad (5)$$

also die zu (1) adjungierte Differentialgleichung. Betrachten wir eine beliebige Potentiallinie $\Phi = K$ und eine Stromlinie $\Psi = C$, so ist im Schnittpunkte beider der Richtungstangens der ersteren $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\partial \Phi/\partial x}{\partial \Phi/\partial y} = -\frac{u}{v}$, derjenige der letzteren $\operatorname{tg}\beta =$

$-\frac{\partial \Psi/\partial x}{\partial \Psi/\partial y} = \frac{v}{u}$, es ist also $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -1$, d. h. Strom- und Potentiallinien, die in einer und derselben Ebene durch die Symmetrieachse liegen, sind Orthogonal-Trajektorien.

II. Quellen und Senken.

Auf der Symmetrieachse befinde sich nunmehr eine punktförmige Quelle, aus der Flüssigkeit nach allen Seiten radial und gleichmäßig ausströmt. Die von dieser Quelle gelieferte Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit kann man angeben, wenn man aussagt, wieviel in einer Sekunde durch die Oberfläche der um den



Quellpunkt gelegten Einheitskugel in die Umgebung austritt. Diese Menge sei $4\pi c$; wir nennen sie „Ergiebigkeit" der Quelle, die Zahl c dagegen ihre „Intensität". Die von einer solchen Quelle erzeugte Strömung ist rotationssymmetrisch in bezug auf jede Achse, die den Quellpunkt enthält. Die Stromlinien sind die Graden durch diesen Punkt, die Stromflächen konzentrische Kugeln um ihn. Die Kontinuitätsbedingung liefert, daß die radiale Geschwindigkeit umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Radius abnehmen muß. Dem wird Genüge geleistet, wenn man für das Potential dieser Strömung den Ansatz macht:

$$\Phi = -\frac{c}{r} = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{6}$$

denn dann ist in der Tat $v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{c}{r^2}$.

u ist nach der Figur $= v_r \cos\alpha$, $v = v_r \sin\alpha$, oder:

$$u = \frac{c\,x}{r^3} = \frac{c\,x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

(7)

$$v = \frac{c\,y}{r^3} = \frac{c\,y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Für eine punktförmige Senke von der „Schluckfähigkeit" $4\pi c$, d. h. für eine Senke, in die sekundlich die Flüssigkeitsmenge $4\pi c$ hineinströmt, gelten die gleichen Beziehungen, nur mit dem umgekehrten Vorzeichen.

Um die Stromfunktion für den Quellpunkt herzustellen, braucht man nur nach (3) zu bilden

$$\Psi = \int_0^y u \cdot y\,dy = \int_0^y \frac{c\,x\,y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$\Psi = c\left(1 - \frac{[x]}{r}\right) \tag{8}$$

Mit Hilfe dieser Formel ist die umstehende Tabelle berechnet und das „Ψ-Diagramm der punktförmigen Quelle" gezeichnet*). Unter dem Ψ-Diagramm wollen wir von nun an immer die graphische Darstellung der Funktion $\frac{\Psi}{c}(x,\ y = \text{const})$ verstehen, also diesem Falle diejenige der Funktion $\frac{\Psi}{c} = 1 - \frac{[x]}{r}$.

Nunmehr denken wir uns eine Strecke von der Länge l kontinuierlich mit Elementarquellen konstanter Ergiebigkeit belegt. Die Ergiebigkeit des Gesamtsystems sei wieder gleich $4\pi c$, so daß die Ergiebigkeit pro Längeneinheit $\frac{4\pi c}{l}$ ist. Legen wir die x-Achse in die Quellstrecke und zwar so, daß der eine Endpunkt Ursprung des Koordinatensystems wird, dann ist bekanntlich das Potential im Aufpunkte $P(x, y)$*)

$$\Phi = \frac{c}{l}\int_0^l \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}} \qquad \text{also:}$$

$$\Phi = c \cdot \log \frac{(x-l)+\sqrt{(x-l)^2+y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Zur Berechnung der Stromfunktion benutzen wir wieder die Integraldarstellung (3) und erhalten damit das Resultat:

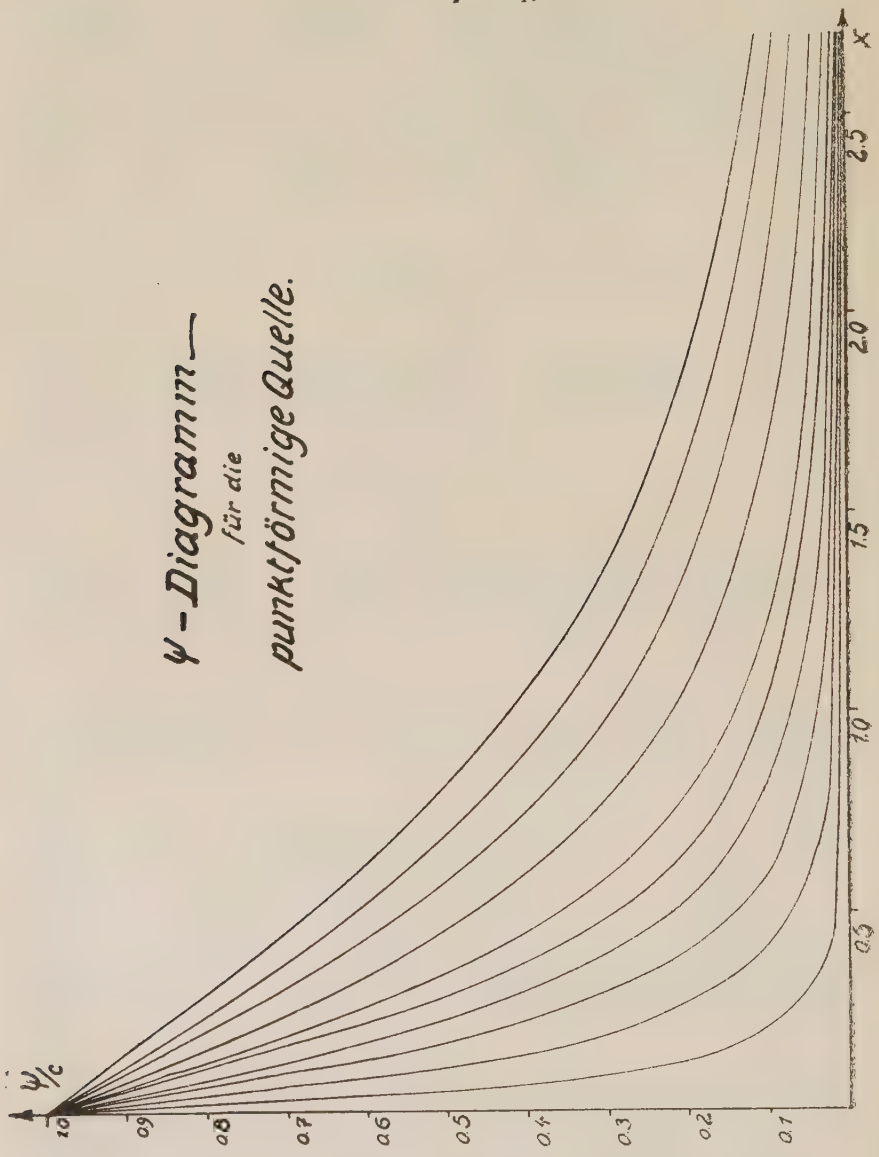
$$\Psi/c = 1 + \left(\frac{r_2}{l} - \frac{r_1}{l}\right), \tag{9}$$

wobei wir die Abstände des Aufpunktes von den Endpunkten der Quellstrecke mit r_1 und r_2 bezeichnet haben. Die Funktion

*) Vgl. Fuhrmann: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen (a. a. O.).

Ψ/c ist tabuliert beigegeben, ebenso das danach hergestellte Ψ-Diagramm.*) (Dabei wurde $l=1$ gesetzt.) Durch Differentiation ergibt sich auch die x Komponente der Geschwindigkeit in einer ähnlich einfachen Form wie die Stromfunktion zu

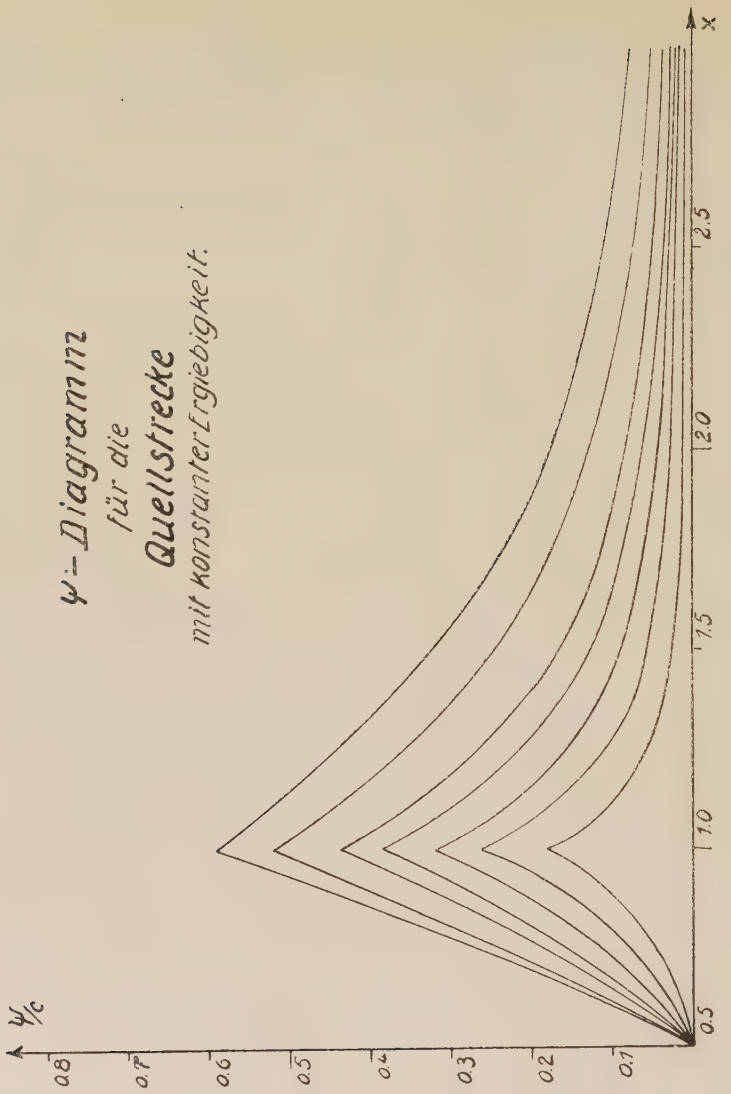
$$u=\frac{c}{l}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \tag{10}$$



*) Vgl. Fuhrmann: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen (a. a. O.)

Tabelle Ψ/c der punktförmigen Quelle.

y=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0
x=0.05	0.5528	0.7581	0.8356	0.8760	0.9005	0.9170	0.9376	0.9501	0.9667	0.9750
0.10	0.2989	0.5328	0.6838	0.7575	0.8039	0.8356	0.8760	0.9005	0.9335	0.9506
0.25	0.0715	0.2192	0.3598	0.4700	0.5529	0.6154	0.7017	0.7575	0.8356	0.8760
0.50	0.0194	0.0715	0.1425	0.2191	0.2919	0.3598	0.4700	0.5528	0.6852	0.7575
0.75	0.0088	0.0338	0.0716	0.1177	0.1680	0.2192	0.3157	0.4000	0.5528	0.6489
1.00	0.0050	0.0194	0.0422	0.0715	0.1056	0.1425	0.2191	0.2928	0.4453	0.5528
1.50	0.0022	0.0088	0.0194	0.0338	0.0555	0.0715	0.1177	0.1680	0.2929	0.4000
2.00	0.0013	0.0050	0.0111	0.0194	0.0299	0.0422	0.0715	0.1056	0.2000	0.2829
3.00	0.0006	0.0022	0.0050	0.0088	0.0186	0.0194	0.0369	0.0518	0.1056	0.1680



III. Der Quellring.

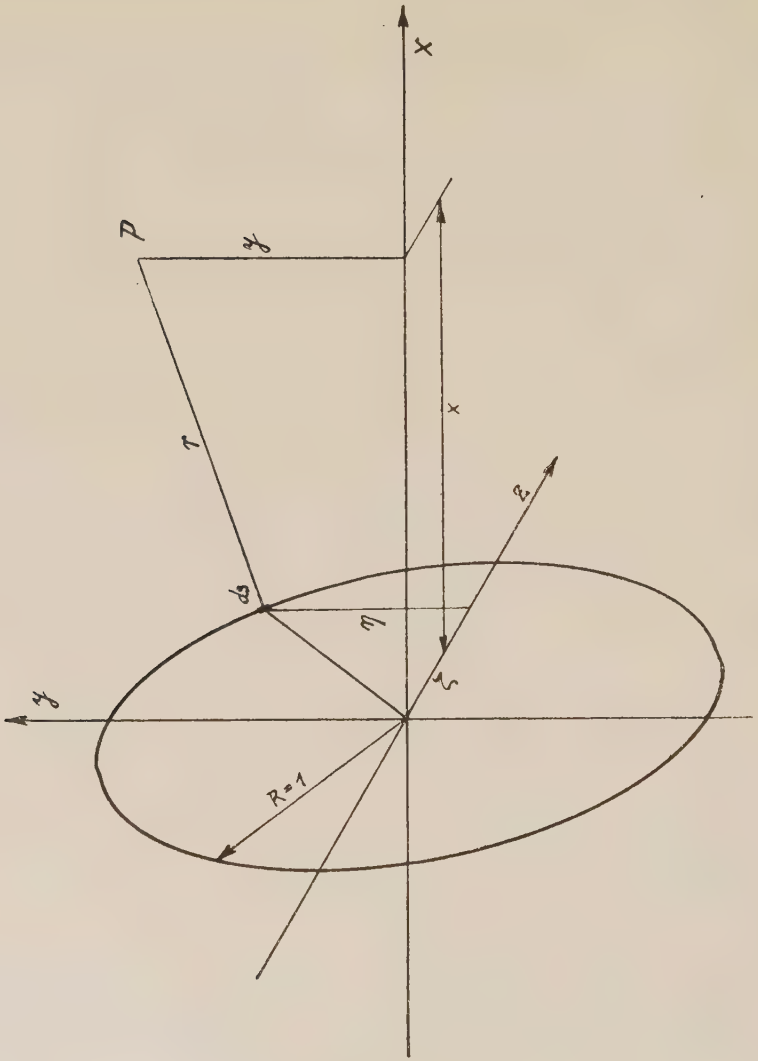
A. Das Potential des Quellringes.

Nunmehr wollen wir einen Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt der Koordinaten-Ursprung ist und dessen Ebene zur x-Achse normal liegt, kontinuierlich mit Elementarquellen konstanter Ergiebigkeit belegen. Diesen mit Quellen belegten Ring nennen wir einen „Quellring". Seine Ergiebigkeit sei $4\pi c_1$. Die durch diesen Quellring erzeugte Strömung ist rotationssymmetrisch in bezug auf die x-Achse. Es genügt daher nach dem obigen

Tabelle Ψ/c der Quellstrecke.

y=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
x=0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.6	0.0039	0.0150	0.0290	0.0445	0.0589	0.0723	0.0944	0.1110	0.1230	0.1330
0.7	0.0091	0.0326	0.0627	0.0938	0.1229	0.1488	0.1914	0.2233	0.2477	0.2665
0.8	0.0174	0.0582	0.1062	0.1528	0.1951	0.2325	0.2932	0.3392	0.3744	0.4017
0.9	0.0359	0.1016	0.1675	0.2274	0.2803	0.3266	0.4020	0.4596	0.5042	0.5393
1.0	0.0950	0.1802	0.2560	0.3230	0.3820	0.4338	0.5193	0.5858	0.6380	0.6795
1.1	0.0369	0.1056	0.1760	0.2418	0.3016	0.3553	0.4461	0.5184	0.5763	0.6231
1.25	0.0153	0.0589	0.1055	0.1592	0.2135	0.2633	0.3540	0.4300	0.4930	0.5464
1.5	0.0066	0.0252	0.0533	0.0879	0.0259	0.1644	0.2434	0.3152	0.3791	0.4349
2.0	0.0025	0.0098	0.0216	0.0374	0.0446	0.0751	0.1102	0.1478	0.1865	0.1865
2.5	0.0013	0.0053	0.0117	0.0206	0.0317	0.0446	0.0751	0.1102	0.1478	0.1865
3.0	0.0008	0.0033	0.0074	0.0130	0.0202	0.0287	0.0493	0.0738	0.1013	0.1307
4.0	0.0005	0.0018	0.0039	0.0070	0.0107	0.0151	0.0260	0.0392	0.0541	0.0701

sie in einer Ebene, z. B. der x-y Ebene, wie wir es im folgenden tun wollen, zu betrachten. Da die Gesamtergiebigkeit gleich $4\pi c_1$ vorausgesetzt ist, beträgt die Intensität pro Längeneinheit



auf dem Ringe $c = \frac{c_1}{2\pi}$. Daher ist die Intensität eines Ringelementes ds an einer Stelle des Kreises mit den Koordinaten (o, η, ζ) gleich c·ds. Der Aufpunkt P habe die Koordinaten (x, y, o). Der Beitrag, den die Elementarquelle auf dem Elemente

ds zum Potential in P liefert, sei d Φ. Nach dem vorigen (II, 6) folgt:

$$d\Phi = -\frac{c}{r}\,ds,$$

wobei

$$r^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2y\eta$$

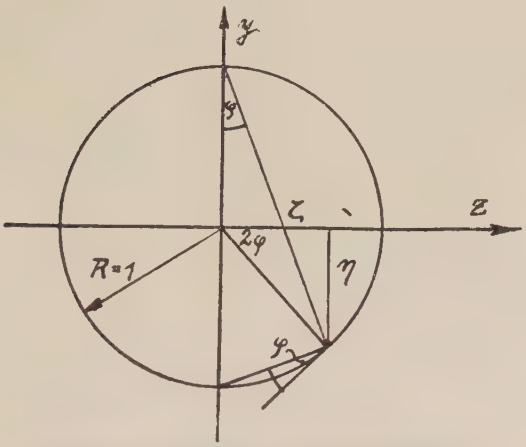
ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$1 + x^2 + y^2 = b,$$

so ergibt sich $r = \sqrt{b - 2y\eta}$. Aus $ds = d\eta\sqrt{1 + \xi'^2}$ und $\eta^2 + \zeta^2 = 1$ erhält man: $ds = d\eta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}$

womit

$$d\Phi = -c\frac{d\eta}{\sqrt{(b - 2y\eta)(1 - \eta^2)}}$$



Geometrische Deutung der Transformationsformel:

gesetzt werden kann. Für Φ selbst folgt daraus durch Integration

$$\Phi = -2c\int_{-1}^{+1}\frac{d\eta}{\sqrt{(b - 2y\eta)\ (1 - \eta^2)}}$$

Dies ist ein elliptisches Integral, das nun auf die Normalform gebracht werden soll. Setzen wir weiterhin zur Abkürzung $\frac{b}{2y} = a$, so erhält man nach einiger Umformung

$$\Phi = -\frac{2c}{\sqrt{2y}}\int_{-1}^{+1}\frac{d\eta}{\sqrt{(a - \eta)(1 - \eta^2)}}.$$

Mit Hilfe der Transformation $\eta = -\cos 2\varphi$

erhält man:

$$\Phi = -\frac{2c}{\sqrt{2y}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin 2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(a+1-2\sin^2\varphi)\,\sin^2 2\varphi}}$$

$$= -\frac{4c}{\sqrt{2y\,(a+1)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2}{a+1}\sin^2\varphi}}$$

Dabei ist $a+1 = \frac{x^2+(y+1)^2}{2y} = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{y}{2} + 1.$

Für $y \geqq o$ und $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ ist der Quotient $\frac{x^2}{2y}$ stets $\geqq o$, der Ausdruck $\frac{1}{2y} + \frac{y}{2}$ aber $\geqq 1$, wovon man sich durch Diffenzieren leicht überzeugen kann. Daher gilt $a+1 \geqq 2$ und daraus $\frac{2}{a+1} \leqq 1$. Setzen wir $\frac{2}{a+1} = k^2$, so ergibt sich

$$\Phi = \frac{-4c}{\sqrt{2y\,(a+1)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

oder nach Einsetzen des Wertes von a

$$\Phi = \frac{-4c}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (11)$$

Das Integral ist das vollständige elliptische Integral erster Art $F(k, \pi/2)$, wobei $k^2 = \frac{4y}{x^2+(y+1)^2}$ ist. Damit ist das Potential des Quellringes erkannt als eine elliptische Modulfunktion, deren Modul vom Orte abhängig ist, und die noch mit einem gleichfalls vom Orte abhängigen multiplikativen Koeffizienten behaftet ist. Aus der Entwicklung geht hervor, daß die Formel (11) nur für positive y gilt, was damit im Einklang steht, daß y die Bedeutung eines Radius hat. Die speziellen Werte des Potentials für Punkte der x-Achse und solche der Ringebene ergeben sich aus Formel (11) zu

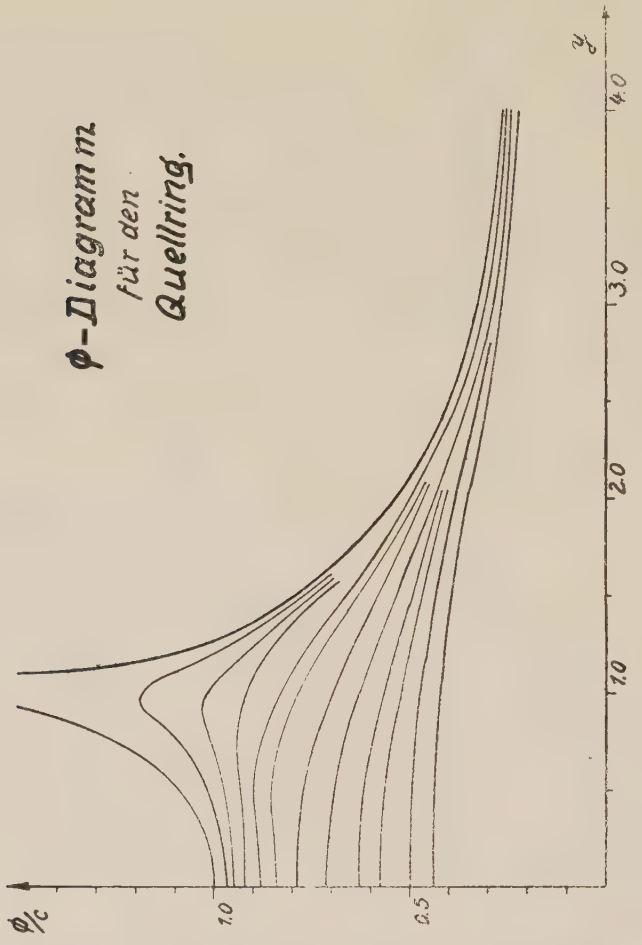
$$\Phi_{y=o} = \frac{-2\pi c}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(x-Achse)}$$

$$\Phi_{x=o} = \frac{-4c}{y+1} \cdot F\left(k_o, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(Ringebene)}$$

wobei $k_o^2 = \frac{4y}{(y+1)^2}$ ist. Auf dem Ringe selbst, also für $y = 1$, $x = o$, nimmt die Potentialfunktion unendlich große Werte an.

y=	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	2.0	2.5	3.0	4.0
x= 0.0	1.000	1.010	1.051	1.117	1.307	∞	0.852	0.536	0.429	0.344	0.255
0,2	0.982	0.987	1.000	1.010	1.130	1.160	0.816	0.531	0.426	0.342	0.253
0.4	0.929	0.945	0.961	0.966	0.964	0.946	0.659	0.529	0.424	0.341	0.252
0.6	0.858	0.874	0.879	0.878	0.862	0.804	0.659	0.500	0.411	0.333	0.248
0.8	0.796	0.794	0.785	0.770	0.746	0.720	0.608	0.486	0.398	0.332	0.247
1.0	0.716	0.775	0.715	0.666	0.646	0.636	0.575	0.455	0.386	0.323	0.245
1.4	0.583	0.576	0.570	0.555	0.541	0.528	0.484	0.409	0.355	0.322	0.244
1.7	0.506	0.502	0.498	0.409	0.487	0.480	0.458	0.376	0.330	0.292	0.231
2.0	0.446	0.444	0.440	0.434	0.425	0.416	0.392	0.349	0.316	0.277	0.218
2.5	0.371	0.368	0.365	0.362	0.357	0.353	0.341	0.317	0.288	0.258	0.213
3.0	0.317	0.315	0.313	0.311	0.307	0.303	0.292	0.271	0.255	0.236	0.201
3.5	0.232	0.232	0.231	0.230	0.229	0.237	0.232	0.223	0.215	0.199	0.182

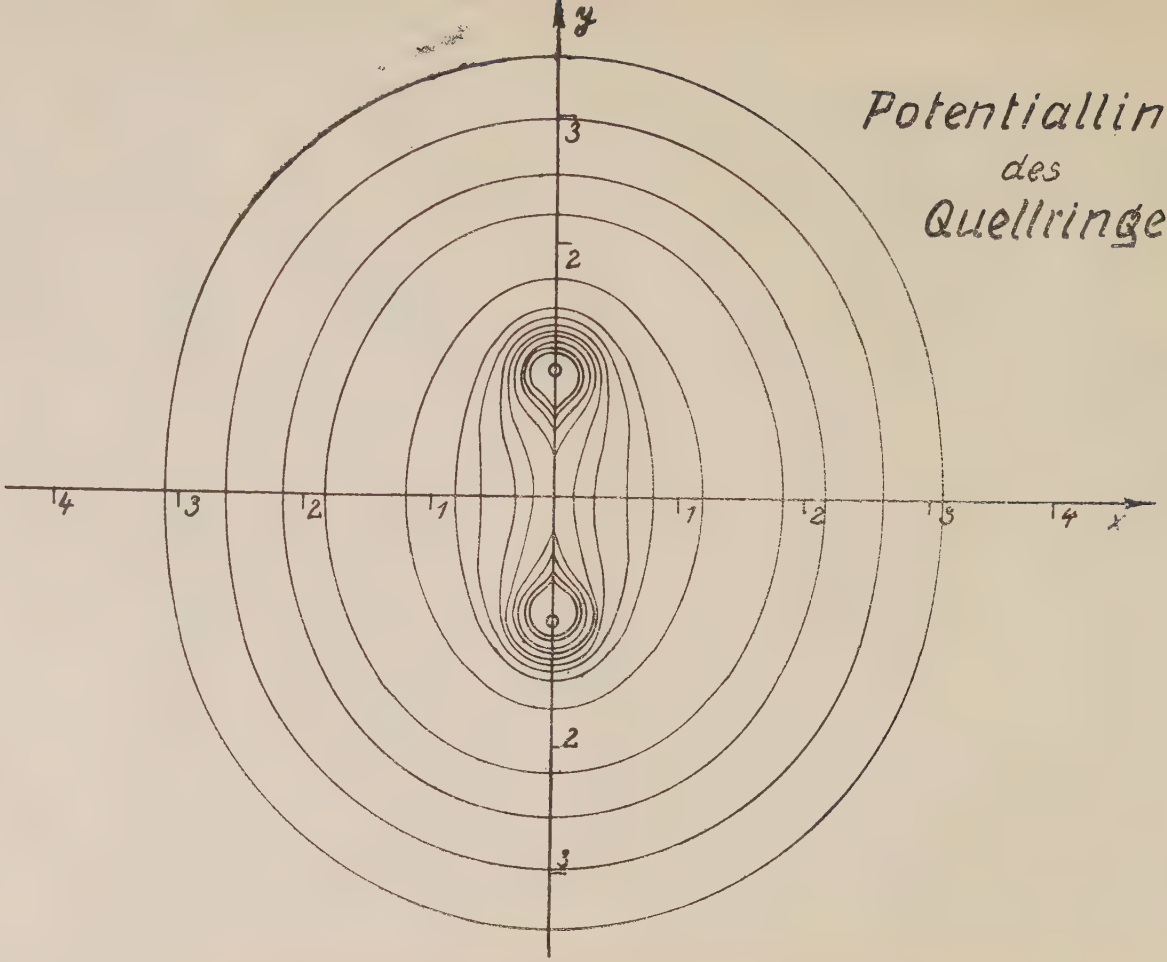
Mit Hilfe des Ausdruckes (11) wurde die Tabelle der Werte Φ/c für den Quellring berechnet und danach das Φ-Diagramm aufgezeichnet (S. 17 und 18)*). Das letztere wurde zur Konstruktion der Kurven $\Phi =$ constans, also der Potentiallinien, benutzt. Zu diesem Zwecke wurden im Φ-Diagramm die Graden $\Phi =$



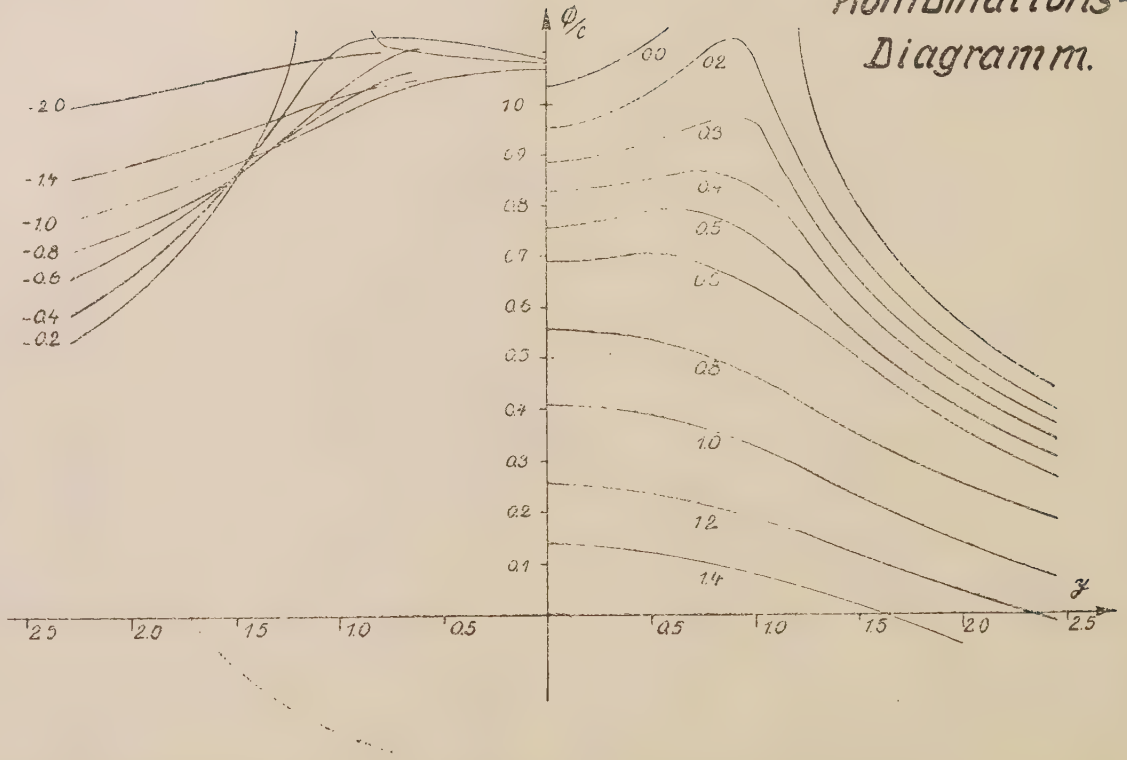
constans gezogen; ihre Schnittpunkte mit den Kurven des Diagramms ergaben die Koordinaten von Punkten ein und derselben Potentiallinie.

Nunmehr soll der Quellringströmung eine Parallelströmung überlagert werden, die die Richtung der x-Achse hat. Ihre Geschwindigkeit sei a. Damit wird ihr Potential

*) Im Diagramm gelten die Kurven von oben nach unten für folgende Werte von y: 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.4, 1.7, 2.0, 2.5.



Potentiallinien
des
Quellringes.


Kombinations-
Diagramm.
Φ/c
z
-2.0
-1.4
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

(12) $$\Phi = a \cdot x$$

In der Tat ist dann $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a$. Die Stromfunktion ergibt sich wieder wie früher mittels des Definitionsintegrales:

$\Psi = \int_0^y u \cdot y\,dy$. In unserem Falle ist u konstant = a und damit wird

(13) $$\Psi = \frac{a y^2}{2}$$

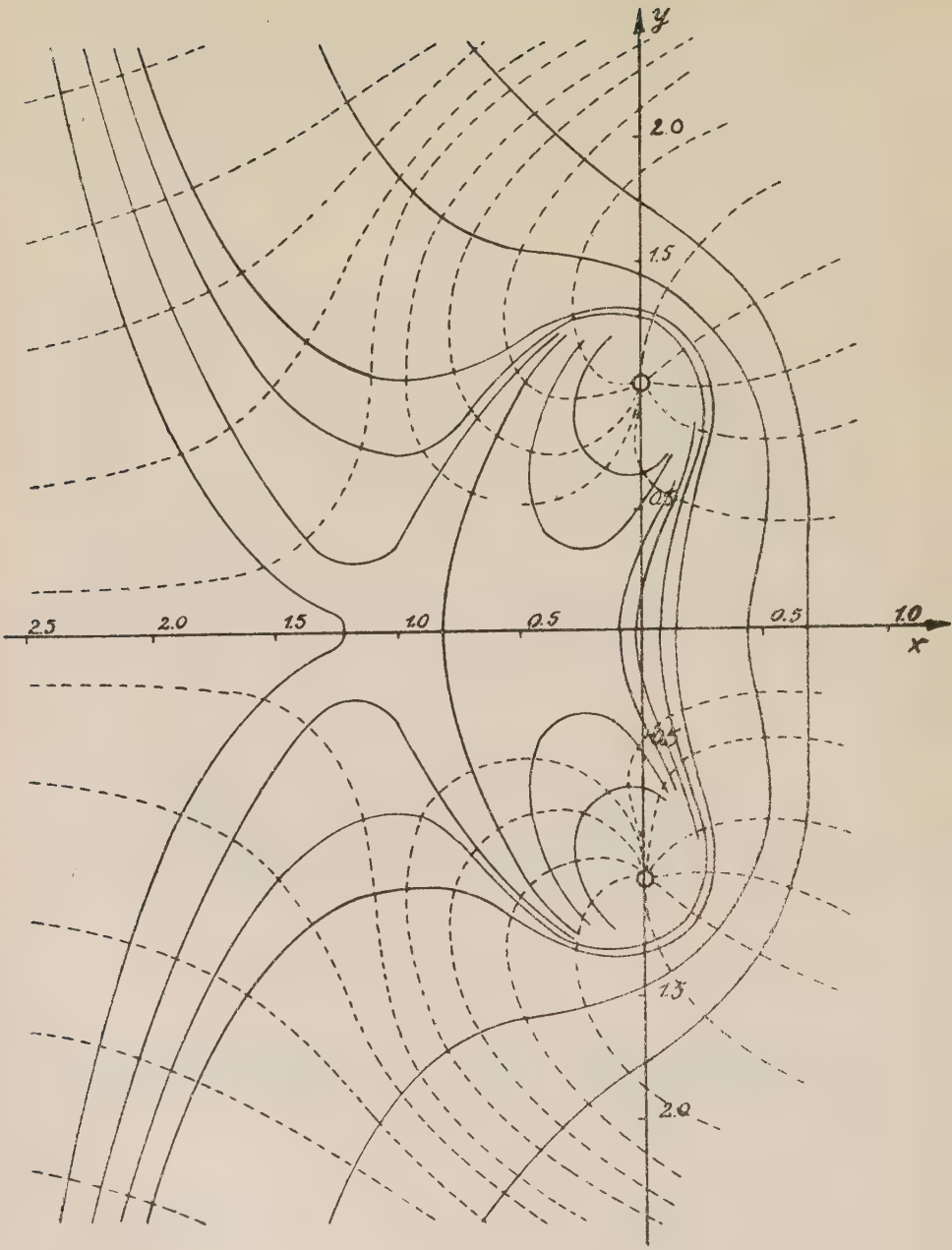
Die aus Quellring- und Parellelströmung kombinierte Strömung hat, wie man leicht einsieht, das Potential $\Phi = \Phi_R + \Phi_P$, wobei Φ_R das Potential der Ringströmung, Φ_P das der Parallelströmung bedeutet. Als Beispiel wurde einer Ringströmung mit c = 1 eine Parallelströmung von der Geschwindigkeit a = 2 überlagert. Unter Benutzung des Φ-Diagramms für den Quellring wurde dasjenige der kombinierten Strömung, also für $\Phi = \Phi_R + \Phi_P$, hergestellt, und mittels der Graden Φ = constans wie oben das Potentialfeld der Kombination gezeichnet. Auf dem beigefügten Schaubild (S. 22) erkennt man, wie die Aequipotentiallinien der Parallelströmung, die sich als Senkrechte zur x-Achse darstellen würden, durch den Ring gestört werden. Die punktierten Kurven wurden als Orthogonaltrajektorien eingetragen und stellen Stromlinien dar.

B. Die Stromfunktion des Quellringes.

Um die obengenannten Stromlinien, deren qualitativen Verlauf man als orthogonale Kurvenschar zu den Potentiallinien angeben kann, genau konstruieren zu können, muß man die Stromfunktion des Quellringes kennen. In der Definitionsformel dieser Stromfunktion $\Psi = \int_0^y u \cdot y\,dy$ steht unter dem Integral die zur x-Achse parallele Komponente u des Geschwindigkeitsvektors der vorgelegten Strömung. Zunächst muß also u für die Quellringströmung berechnet werden. Unter Benutzung der Relation (2) $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ finden wir für

$$\Phi = \frac{-4c}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \cdot F(k, \pi/_2) \text{ und } k^2 = \frac{4y}{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{4cx}{\sqrt{[x^2 + (y+1)^2]^3}} \cdot \Im$$

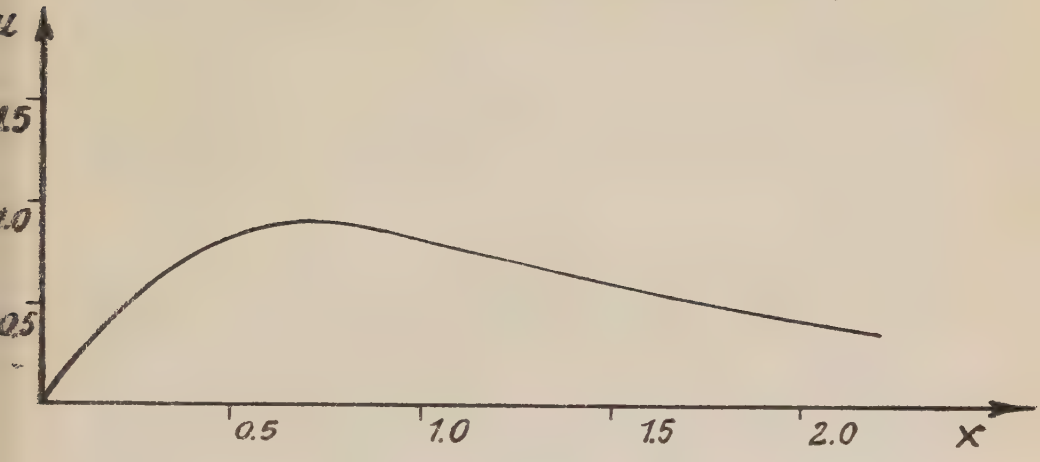

y
2.0
1.5
0.5
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
x
2.5
1.5
2.0

wobei $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}} = \mathfrak{J}$ gesetzt ist.

Das Integral ist wieder elliptisch und soll nun durch Normalintegrale ausgedrückt werden. Wir setzen zur Abkürzung $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ und betrachten den Ausdruck:

$$J = \frac{\sin 2\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Bilden wir $\frac{dJ}{d\varphi}$ so erhält man: $\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{2\cos 2\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{k^2\sin^2 2\varphi}{2\Delta^3\varphi}$.



Mit $\cos 2\varphi = \frac{1}{k^2}\left(2\Delta^2\varphi - (1+k'^2)\right)$

und $\sin^2 2\varphi = \frac{4}{k^4}\left[\Delta^2\varphi(1+k'^2) - k'^2 - \Delta^4\varphi\right]$

ergibt sich $\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{2}{k^2}\left(\Delta\varphi + \frac{1-k^2}{\Delta^3\varphi}\right)$,

woraus unter Einführung von $k'^2 = 1-k^2$ folgt:

$$\frac{1}{\Delta^3\varphi} = -\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{dJ}{d\varphi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\Delta\varphi}{k'^2}.$$

Integrieren wir links und rechts von o bis φ, so erhalten wir

$$(14)\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{k'^2}\cdot E(k,\varphi),$$

wobei $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi\, d\varphi}$ das elliptische Integral

2. Art bedeutet. Unter Berücksichtigung der Grenzen folgt für unser Integral $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2 \, d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^3}} = \frac{1}{k'^2} \cdot E(k, \pi/2),$$

wo k^2 wieder gleich $\frac{4y}{x^2 + (y+1)^2}$ ist. Damit resultiert also für u:

$$(15) \qquad u = \frac{4cx}{\sqrt{(x^2 + (y+1)^2)^3}} \cdot \frac{1}{k'^2} \cdot E(k, \pi/2)$$

mit $k^2 = \frac{4y}{x^2 + (y+1)^2}$

Untersucht man u speziell für Punkte der x-Achse, so ergibt sich

$$(16) \qquad u_{y=o} = c \frac{2\pi x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Das Maximum von $u_{y=o}$ liegt dabei an der Stelle, für die $\frac{du}{dx} = o$ ist.

Bildet man dies, so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{2\pi c}{\sqrt{[x^2 + (y+1)^2]^5}} \left[1 - 2x^2\right] = o$$

also ist u ein Maximum für $x_o = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sim 0{,}707$.

Seine Größe für $c = 1$ ist $u_{max.} = 0{,}382$. Die Stelle, an der das Maximum liegt, ist nach obigem unabhängig von der Intensität des Quellringes. (Hierzu Abbildung auf S. 23).

Mittels der Formel (15) wurden die Werte von u berechnet. In der Tabelle (S. 25) sind sie für den Bereich $0 \leq x \leq 1{,}0$ und $0 \leq y \leq 1{,}4$ angegeben und in dem u-Diagramm (S. 27) graphisch dargestellt.

Nunmehr kann zur Herleitung der Stromfunktion geschritten werden. Nach dem früheren läßt sich Ψ in der Form $\int_0^y u \cdot y \, dy$ angeben. Setzt man hierin den für u oben gefundenen Ausdruck ein, so ist die Stromfunktion durch folgendes Integral gegeben:

$$(17) \qquad \Psi(x,y) = \int_0^y \left[\frac{4cx}{\sqrt{(x^2 + (y+1)^2)^3}} \cdot \frac{1}{k'^2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi \, d\varphi} \right] y \, dy,$$

wobei $k^2 = \frac{4y}{x^2 + (y+1)^2}$ und $k^2 + k'^2 = 1$ ist.

Tabelle der Werte u.

y	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
x=0	0	0	0	0	0	∞	0	0
0.2	0.188	0.204	0.265	0.247	0.884	1.605	1.210	0.954
0.4	0.319	0.340	0.402	0.416	0.718	0.852	0.565	0.349
0.6	0.378	0.394	0.556	0.752	0.575	0.550	0.518	0.342
0.8	0.380	0.391	0.406	0.426	0.437	0.449	0.340	0.282
1.0	0.352	0.358	0.360	0.362	0.358	0.336	0.313	0.246

Die Integration in dieser Formel ist in geschlossener Form nicht ausführbar und mußte daher auf numerischem Wege erfolgen. Zu diesem Zwecke tragen wir uns, wie die Figur auf Seite 28 zeigt, unter Benutzung der Tabelle für die u-Werte die Funktion u (x = const, y) auf. Sie stellt den Verlauf der x-Komponente der Geschwindigkeit an einer festen Stelle x längs des Radius dar. Bilden wir nun weiterhin die Funktion u · y und legen sie graphisch fest, so ist das Integral über sie die gesuchte Stromfunktion. Diese Integration wurde numerisch mittels der Simpson'schen Regel ausgeführt*). Man erhielt auf diese

---

*) Der Versuch, $\Psi(x, y)$ mit Hilfe der Reihenentwicklung von $E(k, \pi/2)$ durch gliedweise Integration zu berechnen, würde auf höchst umständliche Rechnungen führen. — Mit

$$k^2 = \frac{4y}{x^2+(y+1)^2} \quad \text{und} \quad E(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots\right]$$

kommt man zu dem Resultat

$$\Psi(x,y) = \int_0^y \frac{4cx}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} \cdot \frac{\pi}{2(x^2+(y-1)^2)} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4y}{x^2+(y+1)^2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{4y}{x^2+(y+1)^2}\right)^3 - \dots\right] y\,dy;$$

die gliedweise Integration führt dann, abgesehen von Koeffizienten, auf Integrale von der Gestalt

$$\int_0^y \frac{y^{\lambda+1}\,dy}{\sqrt{[x^2+(y+1)^2]^{2\lambda+1}}\,(x^2+(y-1)^2)},$$

Weise bei konstantem x die Stromfunktion in der Form $\Psi = \Psi(x = \text{const}, y)$. Das gleiche Verfahren wurde nun für eine große Anzahl von festen Werten x wiederholt und so entstand die Tabelle der Werte Ψ/c für den Quellring (S. 29)*). Mit Benutzung dieser Tabelle wurden die beiden Ψ-Diagramme für den Quellring hergestellt, von denen das eine für größere Werte y, das andere für Punkte in der Umgebung der x-Achse, also für kleine Werte von y gilt. Zu dem Diagramm für die größeren Werte von y ist im Gegensatz zu dem anderen nicht angegeben, zu welchen Werten y = constans die einzelnen Kurven gehören. Es sei dies daher hier festgestellt: Die einzelnen Kurven von oben nach unten gerechnet gehören zu den Werten y = 3.0, 2.4, 2.0, 1.6, 1.4, 1.2, 1.0, 0.95, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6.

Denken wir nun noch einmal an die Definition der Stromfunktion zurück. $\Psi(x, y)$ bedeutet doch den 2πten Teil derjenigen Flüssigkeitsmenge, die durch eine zur x-Achse senkrechte Kreisfläche mit dem Radius y im Abstande x von der Quellringebene pro Zeiteinheit hindurchfließt. Nähern wir jetzt diese Kreisfläche mehr und mehr der Ringebene, z. B. soweit, daß x gleich der sehr kleinen Zahl δ wird, so sieht man leicht, daß der größte Teil der vom Ring nach der betreffenden Seite, aus der ihm die Kreisfläche angenähert worden ist, ausströmenden Flüssigkeitsmenge, durch ein schmales kreisringförmiges Gebiet dieser Ebene hindurchfließt, das den mittleren Radius R = 1 haben wird, da ja auch der des Ringes gleich der Einheit gesetzt worden ist. Dieser schmale Kreisring teilt die Kreisfläche in drei Gebiete; durch das Innere, das den Mittelpunkt enthält, wird, ebenso wie durch das Äußere, nur ein kleiner Teil der Flüssigkeit hindurchströmen. Geht man jetzt zur Grenze $\delta \to o$ über, und berücksichtigt, daß die Ergiebigkeit des Ringes gleich $4\pi c$ ist, nach jeder Seite der Ringfläche also die Menge $2\pi c$ ausströmen muß, so sieht man leicht folgendes ein: Für $x = +o$ muß $\Psi = o$ sein, wenn $o \leqq y < 1$; $\Psi/c = 1$ sein, wenn $1 \leqq y$. Analog gilt für $x = -o$:

$$\Psi = o \text{ für } o \gtreqless y < 1$$
$$\Psi/c = -1 \text{ für } 1 \gtreqless y.$$

Durch die Ringebene selbst fließt also gar nichts hindurch. Im Ψ-Diagramm bedeutet das, daß die Kurven für $o \leqq y < 1$ alle durch

---

die zwar in geschlossener Form lösbar, aber wegen des verwickelten Aufbaus ihrer Lösungen zur Berechnung von $\Psi(x, y)$ ungeeignet sind. Es wurde daher, wie oben im weiteren angegeben, zur Berechnung die Simpson'sche Regel angewendet, wobei die Werte von $E(k, \pi/_2)$ aus den Funktionstafeln von Jahnke-Emde entnommen wurden, während man bei gliedweiser Integration mit der Reihe selbst rechnen müßte.

*) u, also auch u − y wurde auf 3 Stellen genau berechnet. Zur Fehlerabschätzung der Werte Ψ/c wurde die Simpson'sche Regel 2 mal angewendet, einmal mit einfacher Intervallweite, dann mit doppelter. Da nach Runge-König (Vorlesungen über numerisches Rechnen a. a. O.), der Fehler der genaueren Berechnung etwa 1/15 des Unterschiedes beider Resultate ist, ergab sich in unserem Falle eine Ungenauigkeit der Werte Ψ/c von etwa $\pm 0{,}002$.

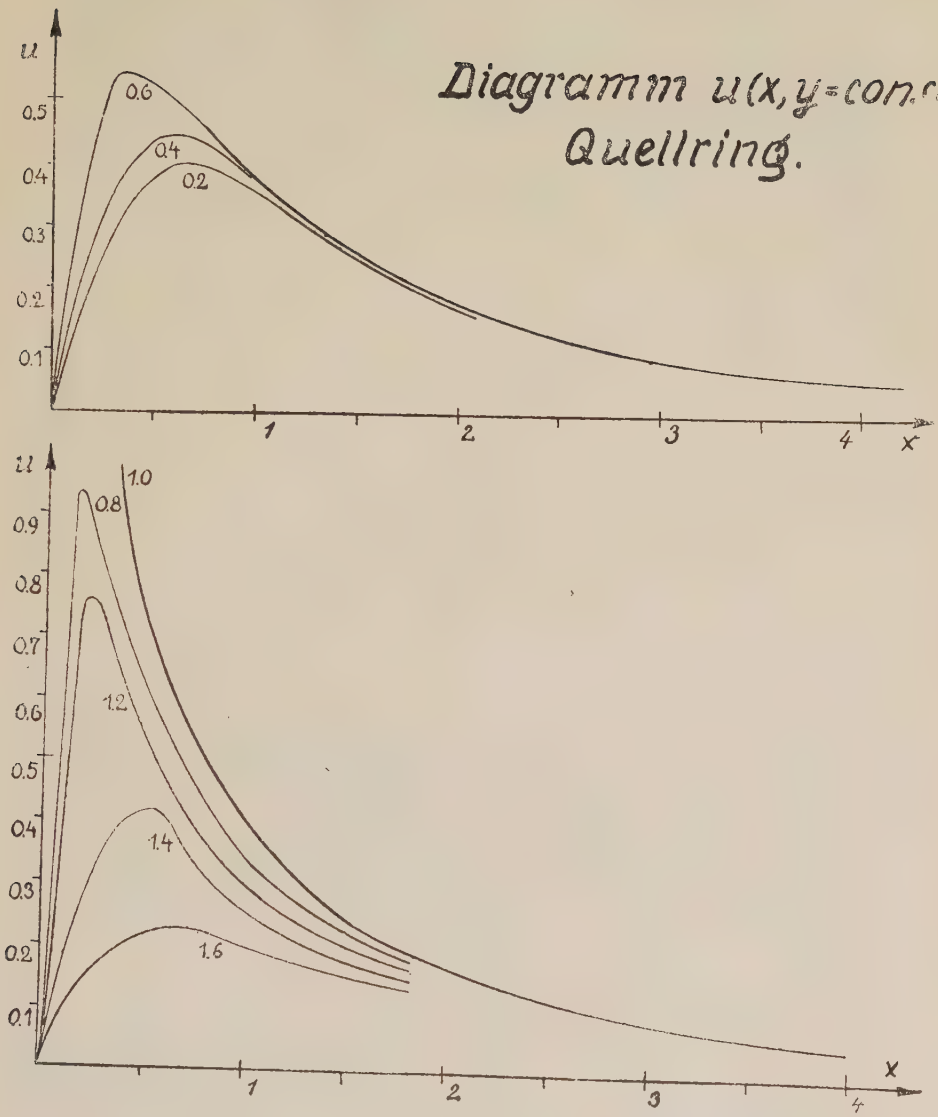
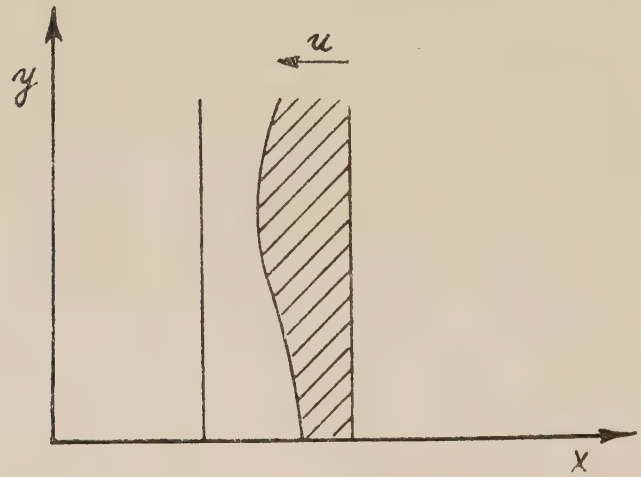


Diagramm u(x, y=const)
Quellring.
u
0.6
0.4
0.2
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
1
2
3
4
x
u
1.0
0.8
1.2
1.4
1.6
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
1
2
3
4
x

den Nullpunkt, diejenigen für $1 \leqq y$ durch den Einheitspunkt, auf der Ψ/c-Achse hindurchgehen. Die Stromfunktion macht also für alle Werte $1 \leqq y$ einen Sprung um 2 c beim Durchgang durch die Quellringebene, während sie für $o \leqq y < 1$ stetig verläuft.

Aus dem Ψ-Diagramm wurden nun ebenso, wie dies bei der Konstruktion der Potentiallinien geschah, mit Hilfe der Graden $\Psi = \text{constans}$ die Stromlinien der Quellringströmung punktweise konstruiert. Aus dem beigefügten Schaubilde ersieht man, daß sich diese Stromlinien mit größerer Entfernung von dem erzeugenden Ring asymptotisch den Graden durch den Ringmittelpunkt nähern (s. S. 32); das bedeutet, daß in immer entfernteren Gebieten der Verlauf der Ringströmung sich derjenigen Strömung



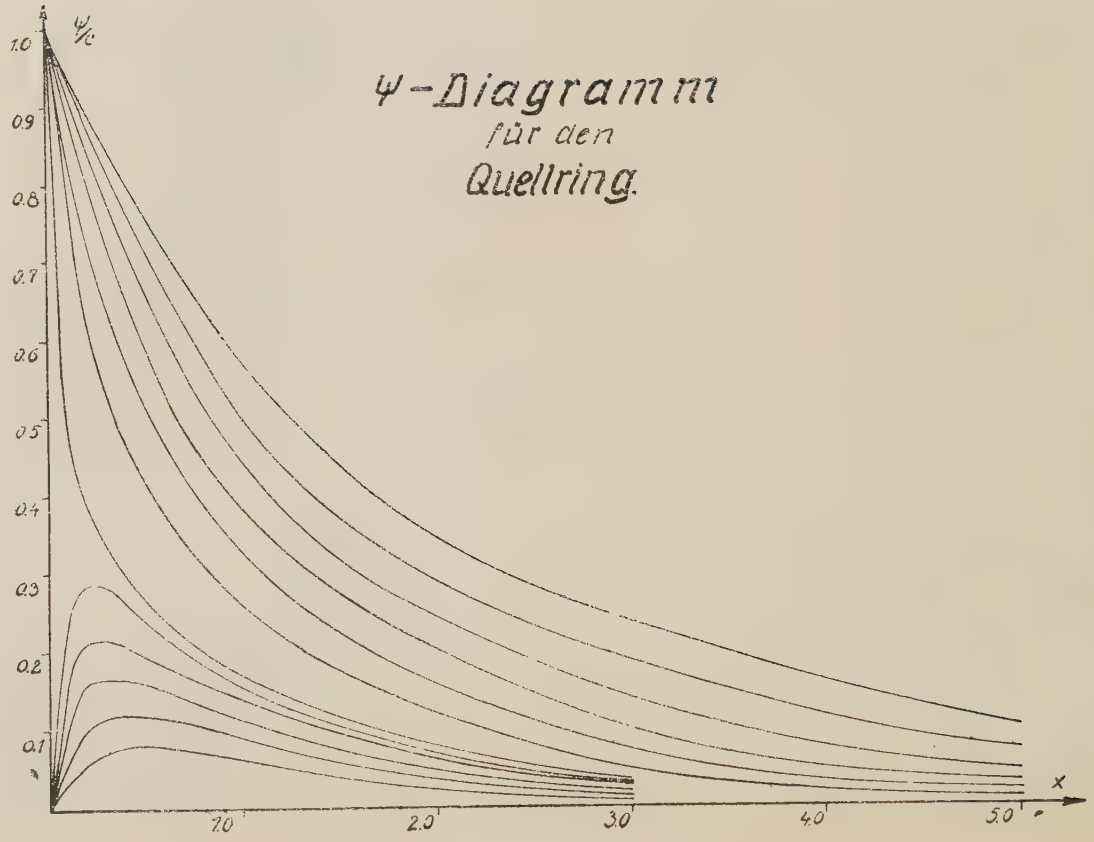
angleicht, die durch einen im Ringmittelpunkte angeordneten Quellpunkt von der gleichen Gesamtergiebigkeit hervorgerufen werden würde. Die gleiche Tatsache findet man qualitativ bestätigt bei einem Vergleich der Ψ-Diagramme für die punktförmige Quelle und den Quellring. Auch bei letzterem verlaufen für größerwerdende x-Werte die Kurven wie bei dem Quellpunktdiagramm. Legt man die Bilder der Potentiallinien und der Stromlinien aufeinander, so findet man, wie nicht anders zu erwarten, daß es sich um orthogonale Kurvenscharen handelt.

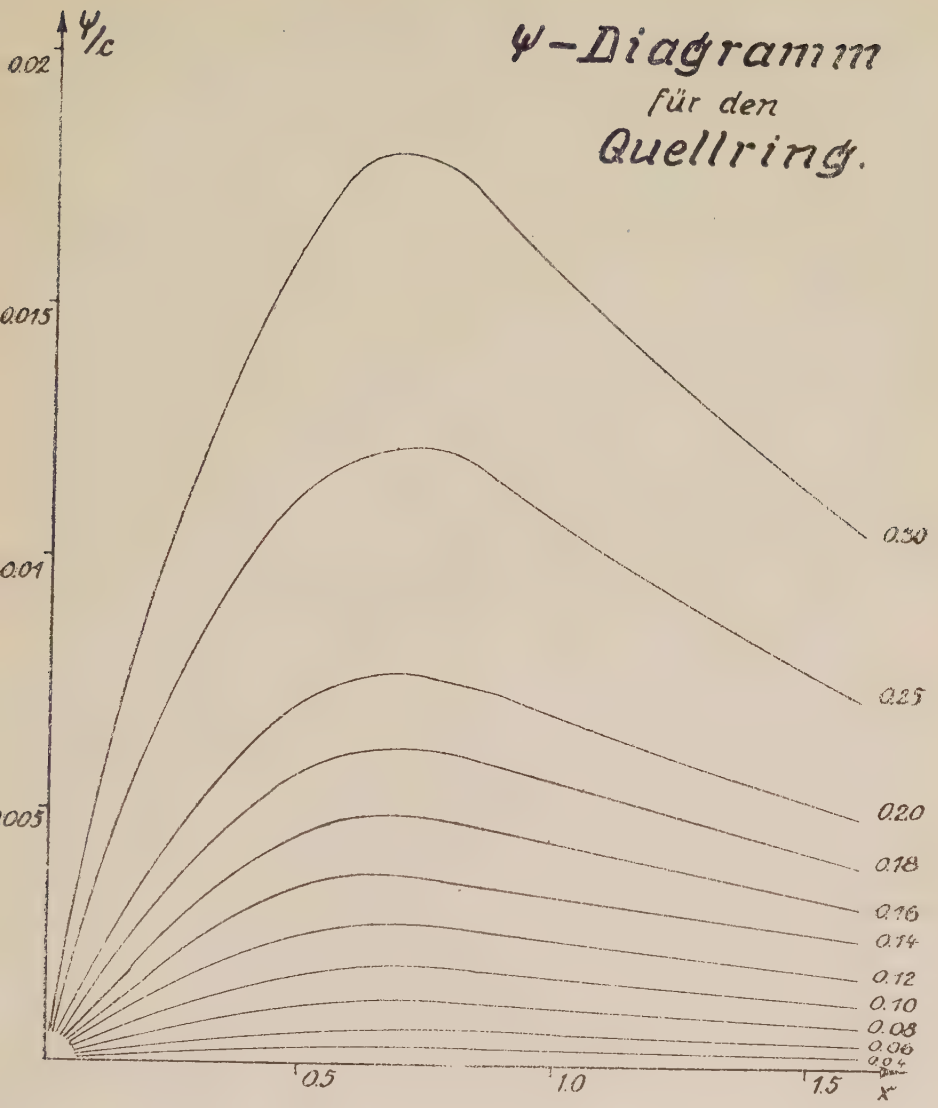
IV. Überlagerung von Quellring- und Parallelströmung.

Nunmehr soll eine Kombination von Quellring- und Parallelströmung vorgenommen werden. Greifen wir auf die Definition des Flusses zurück, so erkennen wir, daß der Fluß der kombinierten Strömung durch eine Kreisfläche von dem Radius y sich additiv zusammensetzt aus dem Fluß der Quellring- und demjenigen der Parallelströmung an der betreffenden Stelle. Es gilt also die Beziehung

$$\Psi = \Psi_P + \Psi_R$$

y=	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
0.1	0.0016	0.008	0.027	0.100	0.470	0.831	0.910	0.929
0.15	0.0032	0.013	0.029	0.140	0.425	0.620	0.741	0.800
0.2	0.0048	0.018	0.056	0.157	0.375	0.735	0.826	0.865
0.3	0.0064	0.019	0.070	0.162	0.332	0.525	0.675	0.690
0.4	0.0064	0.025	0.076	0.162	0.302	0.461	0.581	0.650
0.5	0.0062	0.029	0.075	0.157	0.274	0.410	0.521	0.590
0.6	0.0060	0.029	0.070	0.146	0.254	0.369	0.474	0.537
0.7	0.0056	0.028	0.067	0.137	0.234	0.334	0.430	0.490
0.8	0.0052	0.027	0.065	0.127	0.214	0.299	0.388	0.445
0.9	0.0048	0.027	0.064	0.121	0.196	0.270	0.347	0.395
1.0	0.0042	0.026	0.062	0.113	0.178	0.242	0.310	0.377
1.2	0.0035	0.025	0.053	0.095	0.153	0.206	0.267	0.331
1.4	0.0033	0.022	0.046	0.081	0.127	0.180	0.238	0.293
1.6	0.0032	0.021	0.041	0.072	0.114	0.159	0.220	0.270
y=	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6


Ψ-Diagramm
für den
Quellring.
Ψ/c
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
x



ψ-Diagramm für den Quellring.

x
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
y
1.5
0.5
0.5
1.5

Dabei bedeutet ψ_R die Stromfunktion der Ringströmung, ψ_P diejenige der Parallelströmung. Für letztere fanden wir schon früher den Wert $\Psi_P = \frac{ay^2}{2}$. Setzen wir weiterhin fest, daß, wenn die Kreisfläche in Richtung der positiven x-Achse durchströmt wird, der Fluß das positive, im anderen Falle das negative Vorzeichen erhalten soll, und lassen wir die zu überlagernde Parallelströmung von rechts nach links gegen die Ringströmung anfließen, so ergeben sich für die Kombination folgende beiden Relationen:

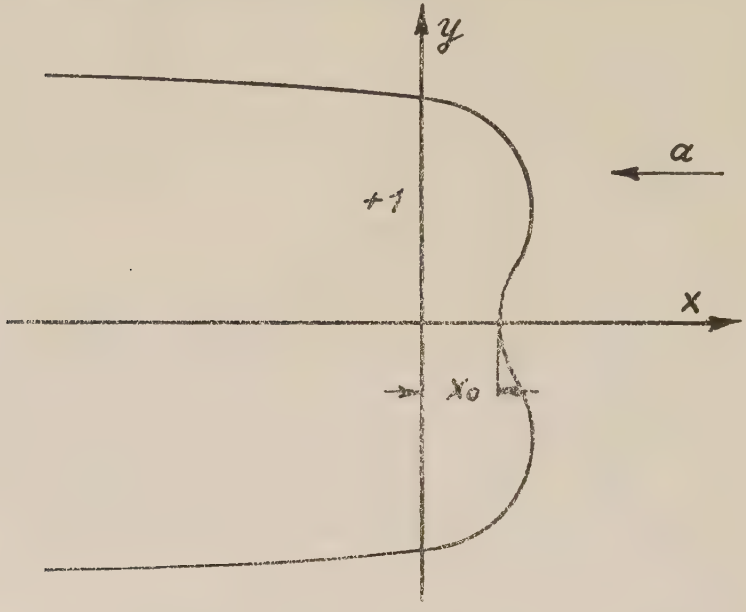
$$\Psi = \Psi_R - \Psi_P \text{ für die rechte Halbebene}$$
$$\Psi = -\Psi_R - \Psi_P \text{ für die linke Halbebene.}$$

Dabei greift man für positive wie negative x den Wert Ψ_R aus dem Ψ-Diagramm für den Quellring ab und versieht ihn nur mit dem entsprechenden Vorzeichen. Beispielsweise berechnet sich bei einer Quellringintensität $c = 1$ und der Parallelströmungsgeschwindigkeit $a = 1$ die Stromfunktion der aus beiden kombinierten Strömung für den Punkt P_1 ($x_1 = 1$, $y_1 = 0{,}8$) zu Ψ_1 gleich $0{,}113 - 0{,}320 = -0{,}207$, für den Punkt P_2 ($x_2 = -1$, $y_2 = 0{,}8$) zu $\Psi_2 = -0{,}113 - 0{,}320 = -0{,}433$.

Aus dem u-Diagramm des Quellringes (s. S. 27), erkennen wir durch Ziehen der Graden $x = \text{constans}$, daß die Kurven u ($x = \text{const.}$, y) für wachsendes y von einem Werte, der der Größe von u auf der x-Achse, also für $y = o$, entspricht, bis zu einem Maximum, das in der Umgebung von $y = 1$ liegt, stetig ansteigen und von da aus stetig wieder absinken müssen, unter asymptotischer Annäherung an den Wert $u = o$, den sie für unendlich große Werte von y erreichen. Der qualitative Verlauf dieser Kurven u ($x = \text{const.}$, y) ist an anderer Stelle angegeben (vgl. S. 28). Wenn wir uns nun vor Augen halten, daß die kombinierte Strömung rotationssymmetrisch ist, erkennen wir, daß die x-Achse stets eine Stromlinie dieser Strömung sein muß. Betrachten wir nach diesen vorbereitenden Ueberlegungen ein von rechts nach links gegen den Quellring mit der Geschwindigkeit a aus $x = +\infty$ anfließendes Flüssigkeitselement der Parallelströmung, das sich auf dem in die x-Achse fallenden Stromfaden bewegt, so wird seine Geschwindigkeit um so langsamer, je näher es der Ringebene kommt. Seine resultierende Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle x läßt sich zu $u = a - u_R\ (x, y = o)$ bestimmen, wo $u_R\ (x, y = o)$ der Wert der x-Komponente der Ringströmungsgeschwindigkeit ist, der aus dem Diagramm auf S. 27 abgegriffen werden kann. Aus diesem Diagramm geht, wie schon früher berechnet, hervor, daß $u_R\ (x, y = o)$ ein Maximum, und zwar an der Stelle $x_o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, erreicht. Bis zu dieser Stelle wird also die Geschwindigkeit des betrachteten Elementes langsamer werden und auf ein Minimum absinken, während bei weiterer Fortbewegung hinter dieser Stelle seine Geschwindigkeit wieder anwachsen wird. Das Minimum seiner resultierenden Geschwindigkeit ist demnach

$$u_{min} = a - u_R \quad (x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ y = o).$$

Diese Ueberlegungen behalten aber nur dann ihre Gültigkeit, wenn an der Stelle $x_o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Geschwindigkeit $a \geqq u_R$ $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, o)$ ist. Im Falle $a > u_{R\,max}$ wird das Flüssigkeitselement durch die Quellringebene hindurchfließen. Ist $a = u_{R\,max}$, dann ist die Geschwindigkeit des Elementes an dieser Stelle zu Null geworden, d. h. an dieser Stelle befindet sich ein Staupunkt. Wenn dagegen $a < u_{R\,max}$ ist, dann muß es eine Stelle $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geben, wir wollen sie $\bar{x}_o$ nennen, für die $a = u_R$ $(\bar{x}_o, o)$ ist; d. h. in diesem Falle liegt dort der Staupunkt der Strömung. Es sind also folgende drei Fälle möglich:



a) Der Staupunkt liegt an der Stelle $x = x_o$, also es gilt $a = u_R$ (x_o, o). Das Flüssigkeitselement kann dann nicht durch die Ringebene hindurchfließen, sondern bewegt sich in einer Stromlinie um den Ring herum, die in einer Rotationsfläche liegt, deren Meridiankurve oben in ihrem ungefähren Verlauf abgebildet ist. Diese Rotationsfläche wollen wir eine „Grenzfläche" nennen. Man sieht nämlich leicht, daß innerhalb des durch diese Grenzfläche gebildeten Halbkörpers nur Flüssigkeit fließen kann, die von dem Quellringe stammt, und ein sich in seinem Äußeren bewegendes Element niemals in das Innere gelangen kann. Wählt man also a so groß, daß diese Grenzfläche entsteht, so ist man in der Lage, die Potentialströmung um einen derartigen Halbkörper zu beschreiben. Man hat dann einfach die Wirkung seiner Form auf die Parallelströmung durch die Kombination einer Quellringströmung mit ihr ersetzt und es existiert realiter nur der im Äußeren verlaufende Teil der kombinierten Strömung.

b) Liegt der Staupunkt genau an der Stelle $x_o = 1/2\sqrt{2}$ so gilt also $a = u_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, o\right)$; es entsteht gleichfalls eine ähnliche Grenzfläche.

c) Ist $a > u_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, o\right)$, dann strömt Flüssigkeit durch das Innere der Quellringfläche hindurch, wie wir oben gesehen haben. In diesem Falle haben wir es nicht mit einem einzigen Staupunkte zu tun, sondern es wird sich jetzt eine Staupunktkurve ergeben, die wegen der Rotationssymmetrie ein Kreis sein muß. Sein Radius sei y_o; sein Abstand von der Ringebene x_o, wobei x_o jetzt eine anders zu bestimmende Größe ist, wie in Fall a und b. Für einen Punkt dieses Kreises, z. B. den in der x-y-Ebene liegenden Punkt P_o (x_o, y_o) muß jetzt der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_o$ der kombinierten Strömung gleich Null sein, da ja eben P_o ein Staupunkt ist. Dies ist nur dann möglich, wenn gleichzeitig beide Komponenten von $\mathfrak{v}_o$ verschwinden. Die Komponenten von $\mathfrak{v}_o$ sind:

$$u_o = a - u_R(x_o, y_o)$$
$$v_o = \quad v_R(x_o, y_o)$$

Wir erhalten also zur Bestimmung der Koordinaten des Staupunktes P die beiden Gleichungen

$$a - u_R(x_o, y_o) = o$$
$$v_R(x_o, y_o) = o$$

Aus der letzteren erkennt man, daß der Staupunkt nur dort liegen kann, wo $v_R = o$ ist, d. h. an denjenigen Stellen, wo die Flüssigkeitselemente der Quellringströmung nur eine Geschwindigkeit parallel der x-Achse haben. Das sind aber offenbar diejenigen Punkte, für die die Stromlinien des Quellringes eine horizontale Tangente besitzen. Verbindet man diese Minima der Stromlinien durch eine Kurve, wir nennen sie „Minimakurve", so weiß man, daß der zu findende Staupunkt P_o nur auf dieser Kurve liegen kann. Die Minimakurve ist auf der nächsten Seite angegeben.*)

*) Die Minimakurve wurde zunächst in das Schaubild der Stromlinien (s. S. 36) eingezeichnet, durch Verbinden der aus dem Bilde ersichtlichen Minima der Stromlinien. Danach wurde eine Nachprüfung der Punkte vorgenommen, indem für sie v berechnet wurde. Es gilt ja $v_R = \frac{\partial \Phi_R}{\partial y}$

wobei $\Phi_R = -\frac{4cx}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \cdot F(k, \pi/2)$; $k^2 = \frac{4y}{x^2 + (y+1)^2}$;

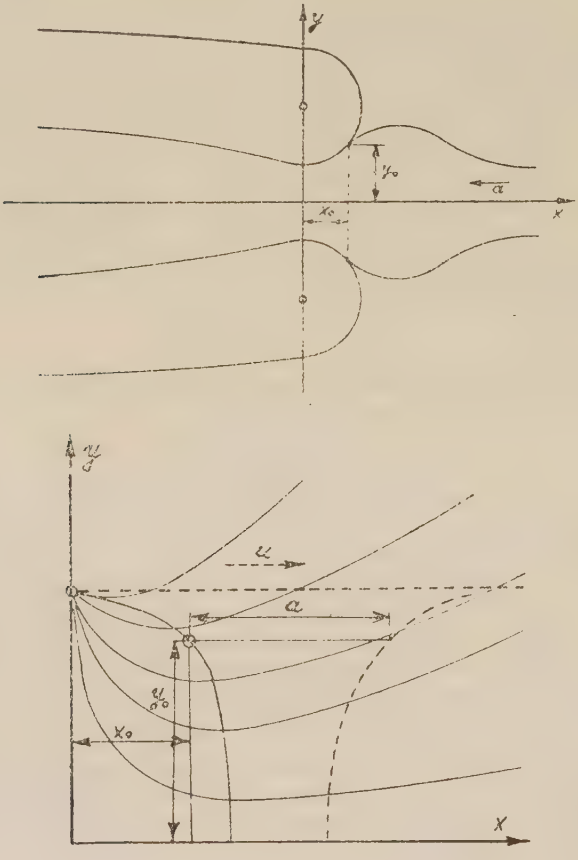
nach Ausführung der Differentiation $\frac{\partial \Phi_R}{\partial y}$ ergibt sich für v_R:

$$v_R = -4c\left[\frac{1}{2y\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \cdot \frac{(E(k, \pi/2)}{k'^2} - F(k, \pi/2) - \frac{y+1}{\sqrt{(x^2 + (y+1)^2)^3}}\right.$$

$$\left.\frac{E(k, \pi/2)}{k'^2}\right] \text{ wobei } (18)\ F(k, \pi/2) = \int_o^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, E(k, \pi/2) = \int_o^{\pi/2} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

Um die in der ersten Gleichung ausgedrückte Bedingung zu erfassen, wurden nun für eine Anzahl von Punkten der Minimakurve die zugehörigen Werte u nach der auf S. 24 angegebenen Formel (15*) berechnet und in der auf untenstehendem Diagramm ersichtlichen Weise aufgetragen. Die Bestimmung des Staupunktes



P_o geht alsdann in der Art vor sich, daß man in dem Diagramm mit dem Stechzirkel die Stelle aufsucht, für die $a = u_R$ ist, und die Koordinaten x_o, y_o abliest (vgl. obige Figur, sowie S. 37).

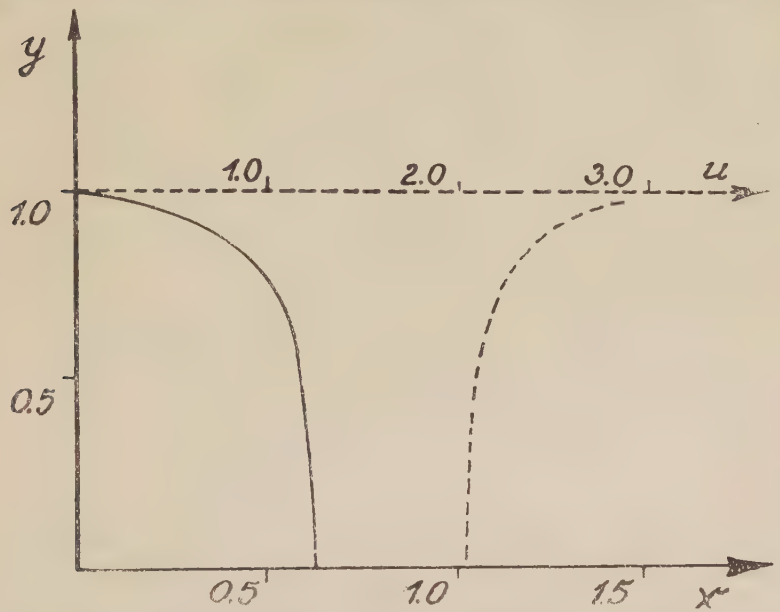
Nachdem man auf diese Weise die Koordinaten des Staupunktes P_o, also damit den Radius y_o des Staupunktkreises und seine Lage gefunden hat, kann man leicht ermitteln, welche

*) Nach dieser Formel wurden für $y = \text{const.}$ verschiedene Werte $v = (x, y = \text{const.})$ berechnet und durch Interpolation festgestellt, für welche Werte V_R zu Null wird.

Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit durch die Fläche dieses Staupunktskreises hindurchfließt. Zu diesem Zwecke braucht man nur zu bilden:

$$(19) \qquad 2\pi \Psi_o = 2\pi \int_o^{y_o} u(x_o, y)\, y\, dy$$

und erhält somit, indem man auf gleiche Art wie früher dieses Integral numerisch auswertet, die Größe der Stromfunktion an der Stelle x_o, y_o. Man kann natürlich auch unter Benutzung des Ψ Diagrammes für den Quellring diesen Wert Ψ_o finden, indem man ihn an der Stelle x_o zwischen den beiden y_o benachbarten Kurven y_n und y_{n+1} ausinterpoliert, (wobei $y_n \leqq y_o \leqq y_{n+1}$ ist).



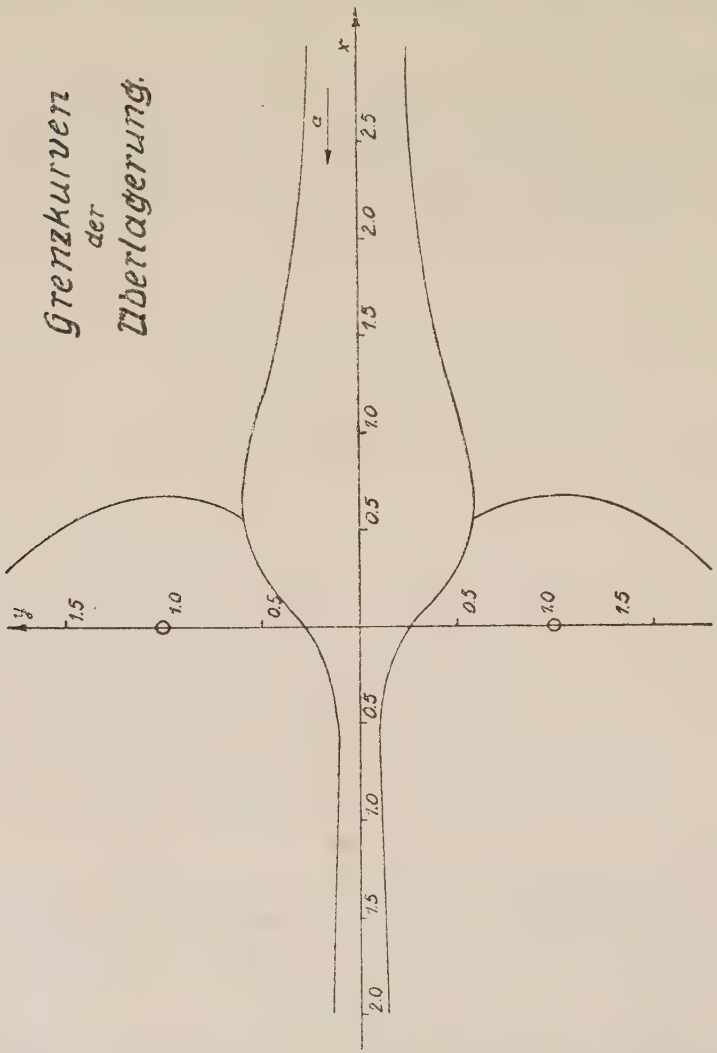
Die Flüssigkeitsmenge $2\pi \Psi_o$ die durch die Staupunktkreisfläche hindurchströmt, muss nun auch durch das Innere des Quellringes fließen. Alle Punkte der Meridiankurve der sich dabei ergebenden Grenzfläche befriedigen mit ihren Koordinaten die Gleichung

$$\Psi_P - \Psi_R = \Psi_o \text{ für } x > o$$
$$\Psi_P + \Psi_R = \Psi_o \text{ für } x < o,$$

wobei angenommen ist, daß die Parallelströmung von rechts nach links strömt.*) Aus dem beiliegenden Schaubilde (s. S. 38), das für $c = 1$ und $a = 0{,}5$ gezeichnet ist, ersieht man, daß als innere

*) Die zu bestimmenden Koordinaten wurden folgendermaßen gefunden: Ψ_P war ja gleich $\frac{1}{2} a y^2$; es wurde nun im Ψ-Diagramm für den Quellring mit Hilfe des Stechzirkels für die Kurve $\Psi_R\ (x,\ y = k)$ die passende Abszisse aufgesucht, für die $\frac{k^2 a}{2} \mp \Psi_R\ (x,\ y = k) = \Psi_o$ war.

Grenzfläche ein rohrförmiger Körper entsteht, der sich in der Nähe des Quellringes verengt. Da in seinem Inneren die Strömung keine Singularitäten besitzt, würde also bereits eine einfache Überlagerung von Ring- und Parallelströmung genügen, um die Bewegungs-



vorgänge in einem solchen sich verengenden Rohre zu beschreiben. Da die Geschwindigkeit in ihm für unendlich ferne Punkte gleich a sein muß, nähert sich seine Gestalt auf beiden Seiten asymptotisch einem Zylinder, dessen Radius y_∞ aus der Beziehung

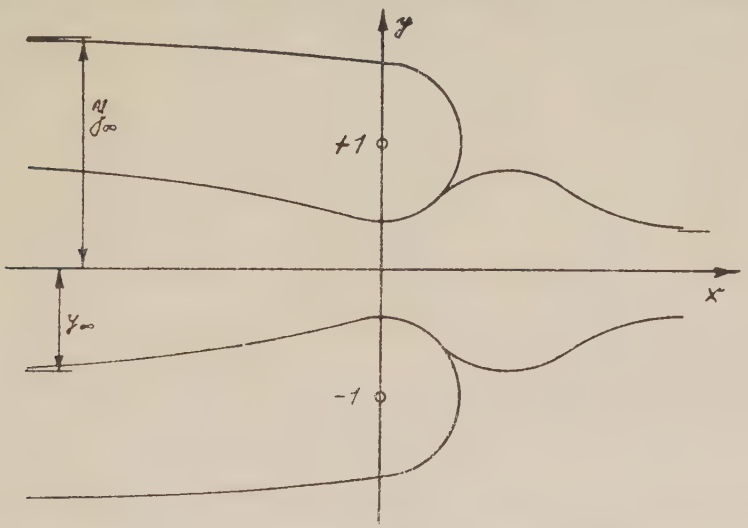
$$\pi y_\infty{}^2 a = 2\pi \Psi_0$$

zu $$y_\infty = \sqrt{\frac{2\Psi_0}{a}}$$ gefunden wird.

Analog den früheren Fällen gibt es dann noch ein Gebiet, innerhalb dessen nur Flüssigkeit strömt, die von den Ringquellen stammt. Dieses Gebiet wird nach der Rotationsachse hin durch die oben gefundene Fläche begrenzt, nach außen dagegen durch eine Rotationsfläche, deren Meridiankurve man punktweise ebenso wie oben finden kann. Die Gleichungen, denen die Koordinaten von Punkten dieser Kurve genügen müssen, lauten jetzt:

$$-\Psi_R + \Psi_P = \Psi_o \qquad \text{für } x > o$$
$$+\Psi_R + \Psi_P = \Psi_o + 2c \text{ für } x < o.$$

Die erste Gleichung wird also für $x > o$ sowohl von den Koordinaten der Punkte der oberen wie auch der unteren Grenzmeridiankurve befriedigt. Da die Geschwindigkeit für $x \to -\infty$ inner-



halb des doppelwandigen Hohlkörpers, in dem nur Ringflüssigkeit strömt, sich ebenfalls dem Werte a nähert, so muß, wenn Y_∞ der Grenzradius der äußeren Begrenzung analog wie oben ist, gelten

$$\pi (Y_\infty^2 - y_\infty^2)\, a = 4\pi c$$

woraus für Y_∞ folgt: $Y_\infty = \sqrt{\frac{2}{a}(2c + \Psi_o)}$

V. Anwendung auf die Potentialströmung in Düsen von Becherturbinen

Die Ergebnisse der früheren Abschnitte sollen im folgenden dazu dienen, die Strömungsvorgänge in Düsen von Becherturbinen zu untersuchen. Becherturbinen sind Freistrahlturbinen, bei denen der statische Ueberdruck des Wassers in einer Düse in Geschwindigkeit umgesetzt wird; die Flüssigkeit verläßt die Düse in freiem Strahl, der ein Tangentialrad beaufschlagt, welches seinerseits das Drehmoment auf die Triebwelle überträgt. Aus

betriebstechnischen Gründen ist es dabei notwendig, die beaufschlagende Wassermenge je nach Bedarf zu verkleinern oder zu vergrößern, was durch Veränderung des Strahlquerschnittes erreicht wird. Dieser Regulierungsvorgang wird technisch durchgeführt mit Hilfe eines nadelförmigen Körpers, der im Innern der Düse achsial verschiebbar angeordnet ist. Durch Vor- und Zurückschieben dieser Nadel kann die Düsenöffnung verändert und damit auch der Strahlquerschnitt variiert werden. Für den Entwurf einer derartigen Düse ist es dabei von außerordentlicher Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Strömungsvorgänge in ihrem vorderen Teile abwickeln, wo der Druck sehr schnell gegen Null, also gegen den Druck im freien Strahle, absinkt. Im hinteren Teile der Düse dagegen, wo der Druck noch fast dem statischen gleichkommt, spielt die Formgebung eine untergeordnetere Rolle. Im folgenden sind nun durch Ueberlagerung von verschiedenen bereits bekannten Potentialströmungen gleichfalls Potentialströmungen berechnet worden, aus denen man Gebiete abgrenzen kann, die die Form der Düsen und Nadeln von Becherturbinen in dem die Praxis interressierenden Teile haben, und zwar so, daß die betreffenden Begrenzungen der Düse und Reguliernadel Stromlinienflächen sind. Es ist dabei in ähnlicher Weise vorgegangen worden, in der Georg Fuhrmann*) Luftströmungen um Ballonkörper berechnet hat. Er ordnet zu diesem Zwecke auf der Symmetrieachse verschiedene Quellen und Senken an, deren Gesamtergiebigkeit gleich Null ist und erreicht bei Ueberlagerung einer Parallelströmung, daß die entstehende Grenzfläche die Form eines Lenkballonkörpers hat.**) In unserem Falle ist eine Strömung herzustellen, deren Stromlinienflächen im Aeußeren die Form der Düse, im Inneren die der Nadel haben. Dies ist erreicht worden durch Anordnung eines Quellringes, der, wie wir oben gesehen haben, eine Verengung des Stromrohres verursacht, und durch Belegung der Achse mit einer Quellen- und Senkenkombination, die die Nadel erzeugt. Letztere Kombination ist in den 6 durchgeführten Fällen zusammengesetzt aus einer punktförmigen Senke, und einer Quellstrecke von konstanter Ergiebigkeit. Ihre Intensitäten und ihre Lage mußten dabei zunächst vielfach variiert werden, bis die entstandene Grenzfläche die Form der Nadel hatte und außerdem der Bedingung genügte, bei Parallelverschiebung in der x-Richtung die Düsenöffnung zu schließen, wie es aus der Praxis heraus gefordert wird. Bei allen 6 Düsen wurden nicht die Grenzflächen als Begrenzung gewählt, sondern benachbarte Stromlinienflächen, und zwar aus folgenden Gründen: Die äußere Grenzfläche, also die Düseninnenwand enthält ja, wie wir früher gesehen haben, den Staupunktskreis, für dessen Punkte

*) Georg Fuhrmann, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen (a. a. O.)

**) Mit Hilfe ähnlicher Ueberlegungen hat H. Blasius verschiedene Formen von Pitot'schen Röhren berechnet. „Ueber verschiedene Formen Pitot'scher Röhren" (Zentralbl. d. Bauverw. 1909, S. 549).

die Geschwindigkeit gleich Null wäre, was aber bei der wirklichen Strömung nicht der Fall ist. Statt der inneren Grenzfläche wurde eine benachbarte Stromlinienfläche gewählt., um eine geeignetere Anschmiegung der Stromfäden am Ende der Nadel an die Achse zu erzielen. Diese Anschmiegung, die theoretisch asymptotisch verläuft, wurde durch eine Spitze angenähert. Die Düse wurde an der Stelle abgebrochen, wo der Druck zu Null wird. Im weiteren Verlaufe erstreckt sie sich fast parallel der x-Achse nach links, wie dies aus dem Schaubild S. 38 zu ersehen ist, so daß an dieser Slelle der freie Strahl angesetzt werden kann. Die punktweise Berechnung der notwendigen Meridiankurven wurde folgendermaßen vorgenommen: Es wurde zunächst, um einen Vergleich aller 6 Düsen zu erreichen, als Düsenbegrenzung diejenige Stromlinienfläche gewählt, deren Meridiankurve durch den Punkt $x = 0{,}2$, $y = 0{,}5$ hindurchgeht. Bei Düse III beispielsweise, wo sich auf der x-Achse eine punktförmige Senke von der Intensität $c = 0{,}05$ an der Stelle $x = 0{,}5$ befindet, und die Quellstrecke konstanter Ergiebigkeit von der Gesamtintensität $c = 0{,}05$ die Endpunkte $x = 0{,}5$ und $x = 1{,}5$ hat, wurde bei einer Ueberlagerung mit einer Ringströmung von $c = 1{,}0$ und einer Parallelströmung mit $y = 1$ zunächst $\bar{\Psi}$ ($x = 0{,}2$; $y = 0.5$) ermittelt. Dies geschah auf Grund der Beziehung: $\bar{\Psi} = \Psi_P - \Psi_R - \Psi_S + \Psi_Q$, alles an der betreffenden Stelle $x = 0{,}2$, $y = 0{,}5$ genommen.

Ψ_P ist nach dem früheren gleich $\frac{ay^2}{2} = \frac{1 \cdot 0{,}25}{2} = 0{,}125$.

Ψ_R ist nach dem Diagramm gleich 0,031. Da sich die Senke an der Stelle $x = 0{,}5$ befindet, ist der Wert von Ψ_S aus dem Ψ-Diagramm der punktförmigen Quelle für $x = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$ zu entnehmen; man findet $c \cdot \Psi_S = 0{,}024$. Bei der Quellstrecke liegt der Ursprung des Ψ — x-Koordinatensystems in der Mitte der Strecke. Bei unserer Anordnung ist dieser Mittelpunkt der Punkt $x = 1{,}0$ der x-Achse; den Wert Ψ_Q an der Stelle $x = 0{,}2$ hat man also im Ψ-Diagramm der Quellstrecke bei $x = 1{,}0 - 0{,}2 = 0{,}8$ zu suchen, und findet $c \cdot \Psi_Q = 0{,}010$. Damit ist also $\bar{\Psi} = 0.125 - 0{,}031 - 0{,}024 + 0{,}010 = 0{,}080$.

Die Bestimmung weiterer Punkte der Meridiankurve geht auf Grund folgender Beziehungen vor sich:

$$\Psi_P - \Psi_R - \Psi_S + \Psi_Q = \bar{\Psi} \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 0.5$$

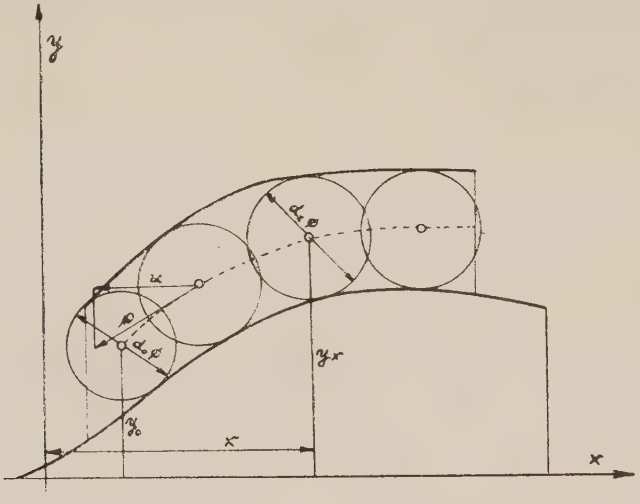
$$\Psi_P - \Psi_R + \Psi_S + \Psi_Q = \bar{\Psi} + \frac{\bar{c}\xi}{l} \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1.0$$

$$\Psi_P - \Psi_R + \Psi_S - \Psi_Q = \bar{\Psi} + \frac{\bar{c}\xi}{l} \quad \text{für } 1.0 \leqq x \leqq 1.5$$

$$\Psi_P - \Psi_R + \Psi_S - \Psi_Q = \bar{\Psi} \quad \text{für } x \geqq 1.5$$

Hierbei ist $\bar{c}$ die Gesamtintensität der Quelle oder Senke (in obigem Beispiel ist $\bar{c} = 0{,}05$), l ist die Länge der Quellstrecke (oben $l = 1{,}0$). ξ ist die Entfernung des jeweiligen Querschnittes, für den

Ψ berechnet werden soll, vom rechten Endpunkte der Quellstrecke. Für $\Psi = 0$ erhält man die innere Grenzfläche, d. h. die Nadel. An einer beliebigen Stelle $x = k$ wurde die Rechnung folgendermaßen ausgeführt: Es wurden für ein beliebiges $y = y_1$ wie bei der Bestimmung von $\overline{\Psi}$ die Werte Ψ_R, Ψ_S und Ψ_Q aus den Diagrammen entnommen und in die zu $x = k$ gehörige Gleichung obigen Gleichungssystemes eingesetzt; es ergab sich dabei auf der rechten Seite ein im allgemeinen von $\overline{\Psi}$ (oder Null) verschiedener Wert Ψ_1. Nun wurde die gleiche Rechnung für $y = y_2$ ausgeführt, was z. B. zu den Wert Ψ_2 geführt haben soll. Analog wurde noch für $y = y_3$ verfahren und meist noch für $y = y_4$, was Ψ_3 und Ψ_4 ergab. Nun wurde die Kurve $\Psi = \Psi(x = k, y)$ gezeichnet und alsdann festgestellt, für welches y die Ordinate gleich $\overline{\Psi}$ war. Auf diese Weise ergab sich Punkt für Punkt die entsprechende Meridiankurve.



So wurden die Düsen I—VI konstruiert. Nun wurde nach folgendem in der Praxis üblichen Annäherungsverfahren für einen mittleren Stromfaden der Druckverlauf errechnet: Der Druck an einer beliebigen Stelle ist ja nach der Bernouillischen Gleichung

$$p_x + \frac{\varrho}{2} \mathfrak{v}_x^2 = p_o + \frac{\varrho}{2} \mathfrak{v}_o^2 = \text{constans}, \tag{20}$$

wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Ist $p_o = o$ der Druck und $\mathfrak{v}_o$ die Geschwindigkeit beim Austritt aus der Düse, so ergibt sich

$$p_x = \frac{\varrho}{2} \left(1 - \frac{\mathfrak{v}_x^2}{\mathfrak{v}_o^2} \right) \tag{21}$$

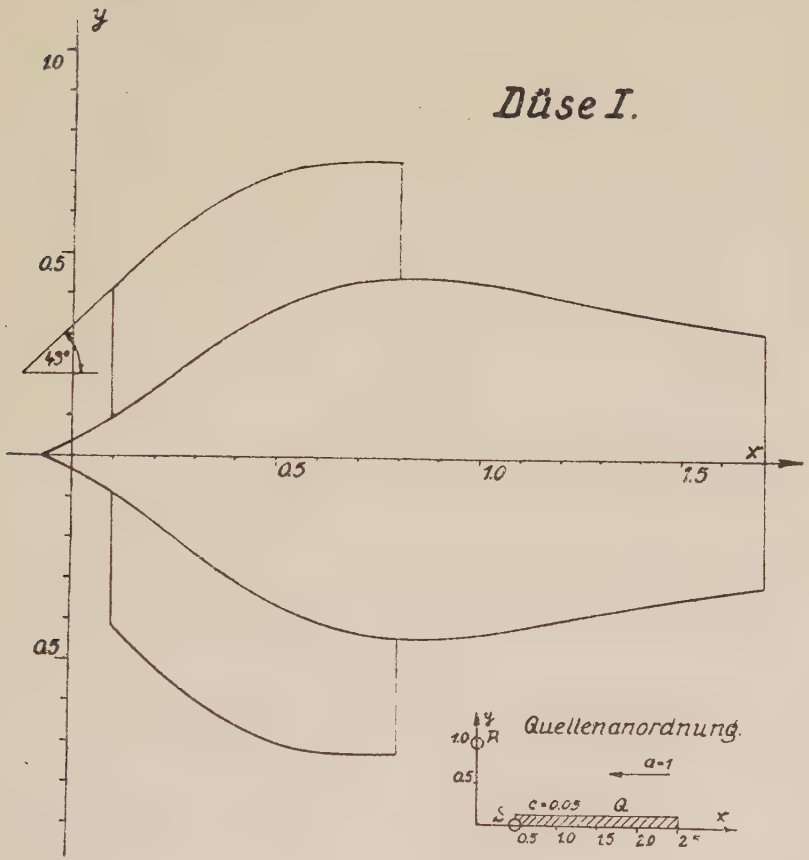
Da aber wegen der Kontinuität die Proportion $\mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_o = f_o : f_x$ besteht, wobei f_o den Austrittsquerschnitt, f_x den Querschniit an der Stelle x bedeutet, so läßt sich (21) auch in der Form

$$p_x = \frac{\varrho}{2} 1 - \left(\frac{f_o^2}{f_x^2} \right) \tag{22}$$

schreiben. Der Querschnitt f_x ist dabei derjenige, durch den die

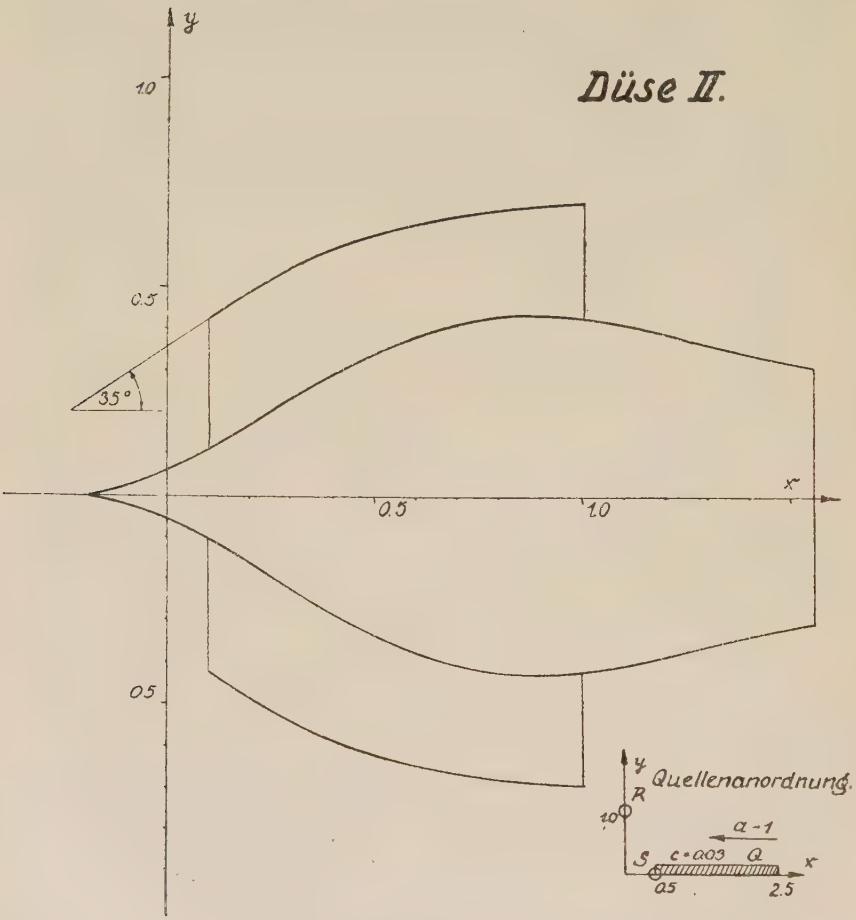
Flüssigkeit senkrecht hindurchtritt, d. h. er liegt in einer Potentialfläche. Ihre Meridiankurve stellt sich als eine gekrümmte Linie dar, deren Länge von der Düsenbegrenzung bis zur Nadel l sei, und deren Schwerpunkt die Koordinate η haben. Dann ist nach der Guldin'schen Regel $f_x = 2\pi\eta$.

Bei der Näherungsrechnung wird die Länge l dieser gekrümmten Linie durch den Durchmesser desjenigen Kreises ersetzt, der sowohl die Düsen- wie auch die Nadelkontur berührt. Dabei wird



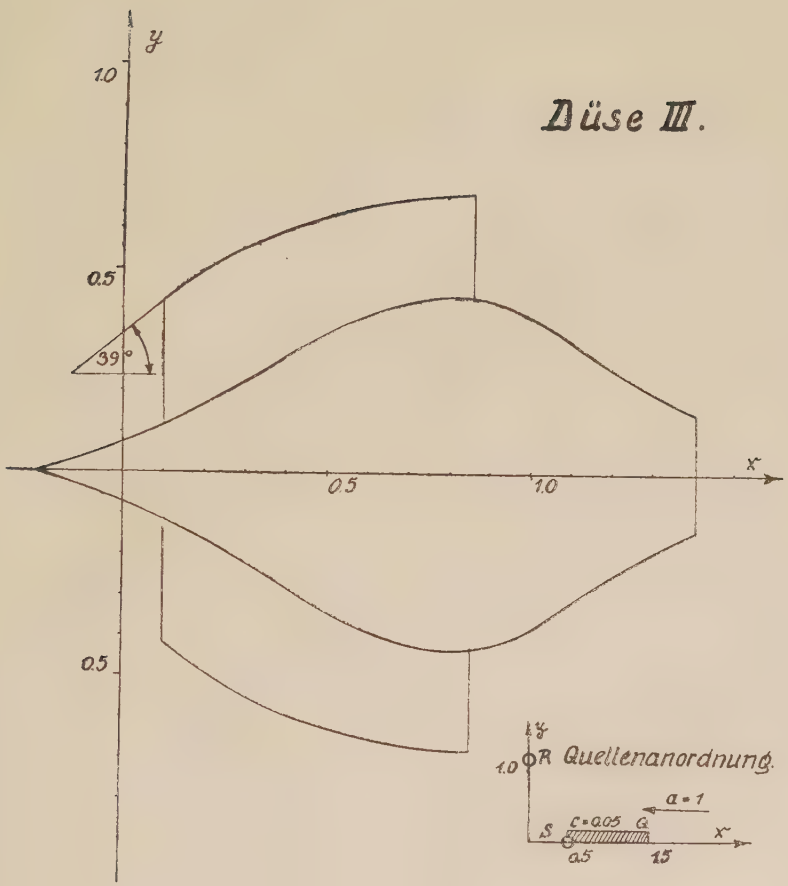
angenommen, daß der sich somit berechnende Druck an der Stelle des Kreismittelpunktes erreicht wird. Nach diesem Verfahren wurde die gestrichelte Druckkurve des Druckdiagrammes (S. 49) gewonnen, wobei der jeweilige Druck in Prozenten desjenigen des Düseneintrittsquerschnittes angegeben wurde. Nun wurde zum Vergleich der Druck aber auch direkt aus Formel (21) errechnet, indem man die x-Komponente u von $\mathfrak{v}_x$ für irgend einen Kreismittelpunkt aus den an dieser Stelle gültigen x-Komponenten der Kombinationsströmungen additiv zusammensetzte.

und, da die Richtung des Stromfadens bekannt ist, daraus die Größe des Vektors $\mathfrak{v}$ ermitteln konnte. Die sich auf diese Weise ergebenden Druckkurven verliefen bei allen Düsen höher, als die auf dem angenäherten Wege gewonnenen. Es ergibt sich daraus

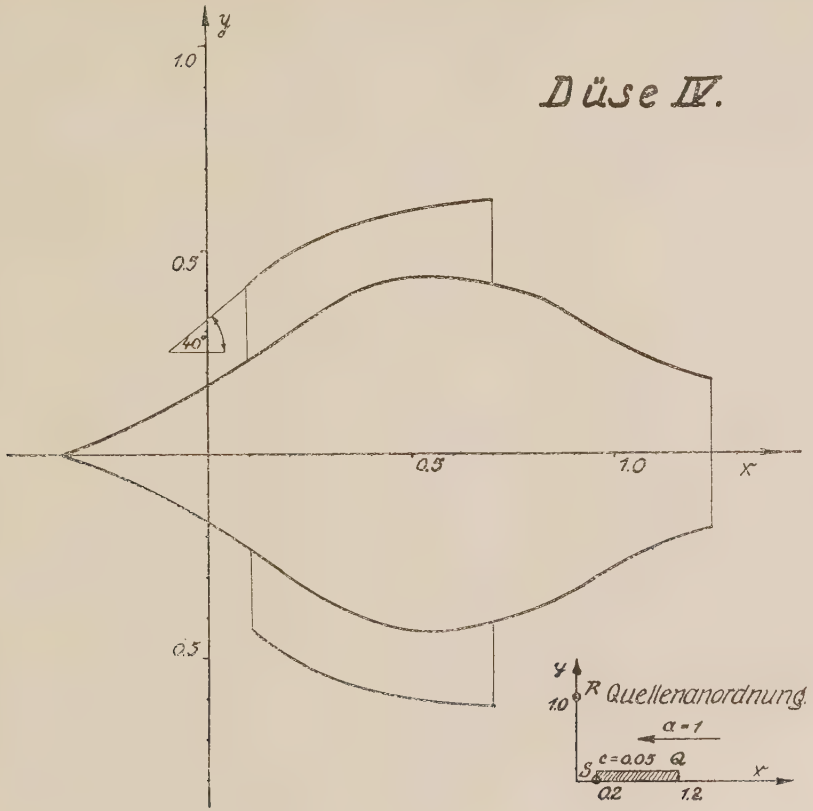


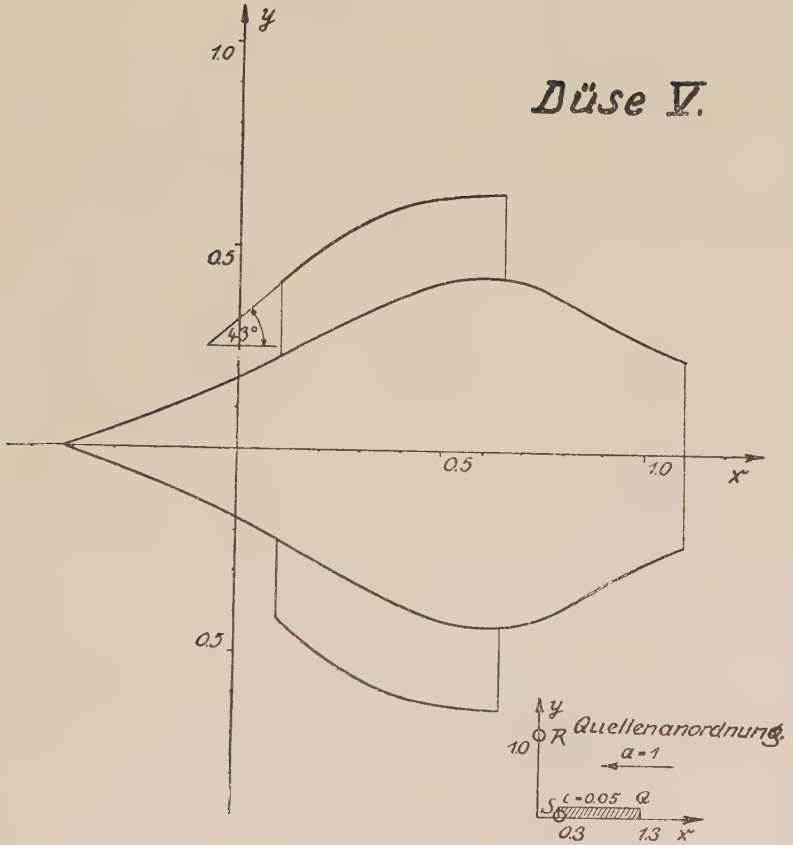
die Folgerung, daß die Praxis bei Anwendung des Berührungskreisverfahrens mit einem Sicherheitsfaktor rechnen muß, wie dies auch tatsächlich geschieht.

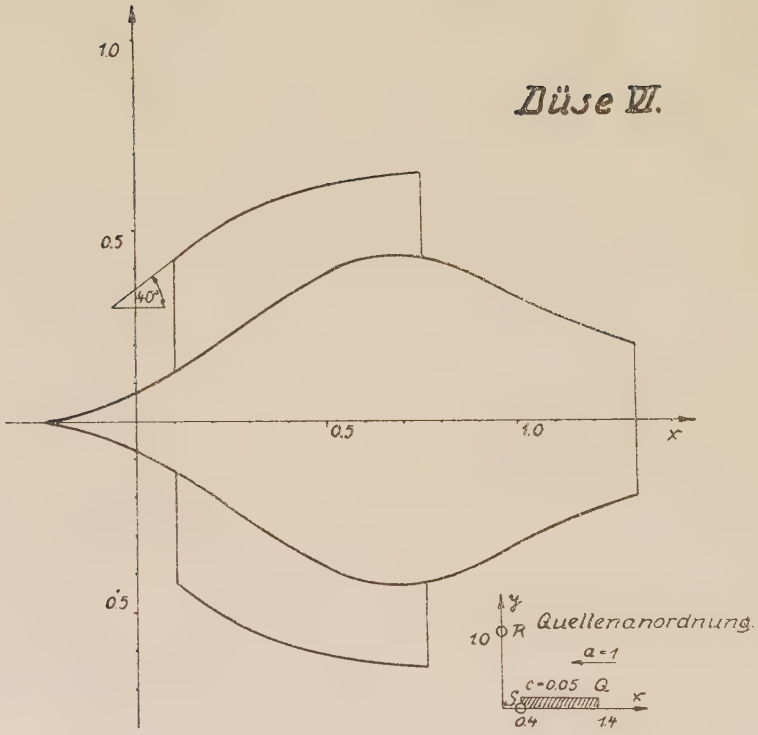
Im übrigen aber zeigt sich, daß die Näherungsmethode der Praxis zu Ergebnissen führt, die sich mit der Theorie in ihrer Größenordnung vollkommen decken.


Düse III.
y
1.0
0.5
39°
0.5
1.0
x
0.5
y
1.0
R
Quellenanordnung.
a = 1
S
ε = 0.05
Q
x
0.5
1.5

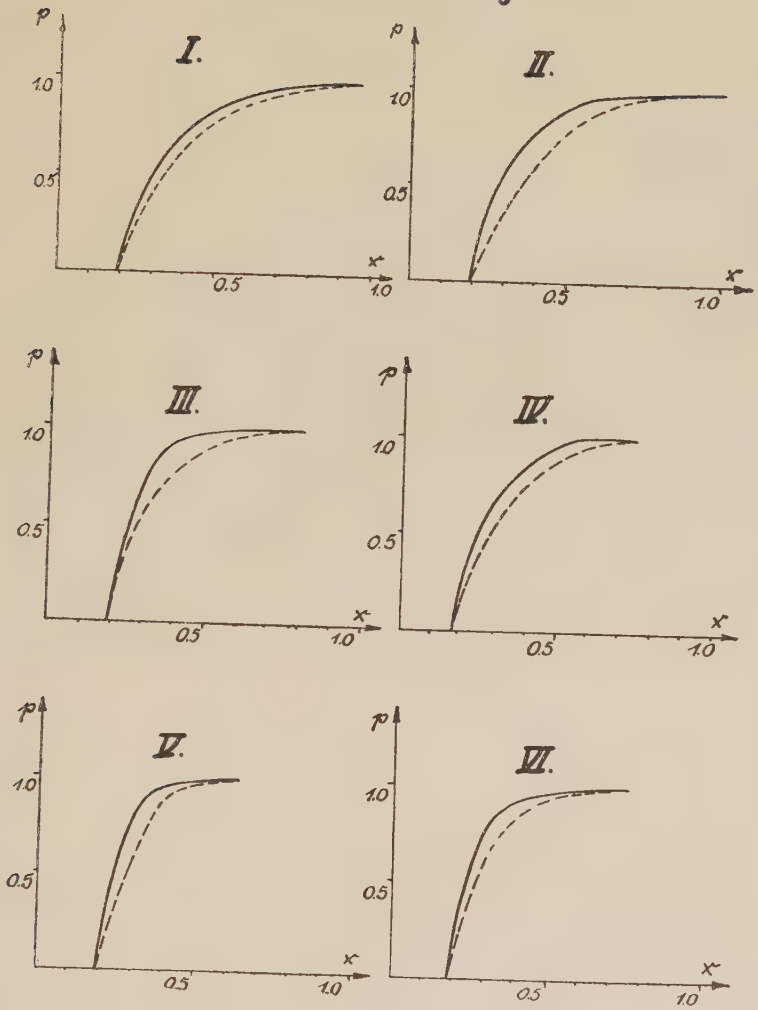
Düse IV.




Düse V.
y
1.0
0.5
43°
0.5
1.0
x
0.5
y
1.0
R
Quellenanordnung
a = 1
S
c = 0.05
Q
0.3
1.3
x


Düse VI.
1.0
0.5
40°
0.5
1.0
x
0.5
y
10
R
Quellenanordnung.
a=1
c=0.05
Q
x
0.4
1.4

Druckverlauf.



Literaturangabe.

Durège, Theorie der elliptischen Funktionen.

Fuhrmann, Georg, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. (Dissertation, Göttingen.)

Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.

Lamb, Horace, Lehrbuch der Hydrodynamik. (Deutsch von Joh. Friedel.)

Runge-König, Vorlesungen über numerisches Rechnen.

Lebenslauf.

Ich, Justin Kleinwächter, bin am 17. September 1901 zu Groß-Wartenberg als Sohn des Lehrers Max Kleinwächter geboren. Ich besuchte nach dreijähriger Schulzeit auf der Volksschule das humanistische Gymnasium in Waldenburg in Schlesien, das ich Ostern 1921 mit dem Reifezeugnis verließ. Nach einem halben Jahre praktischer Tätigkeit ließ ich mich im Wintersemester 1921/22 an der Technischen Hochschule Breslau bei der Fakultät für Maschinenwirtschaft immatrikulieren und bestand im November 1925 das Diplom-Hauptexamen. Von Wintersemester 1924/25 bis 1927 war ich Assistent am Lehrstuhl für Geometrie (Professor Dr. phil. Happel) und von Sommersemester 1926 bis 1927 auch am Lehrstuhl für Mathematik (Professor Dr. phil. Schmeidler).

Auch an dieser Stelle möchte ich meinen hochverehrten Lehrern, Professor Dr. phil. Schmeidler und Professor Dipl.-Ing Krauß, meinen herzlichsten Dank aussprechen für das rege Interesse und die Förderung, die sie der vorliegenden Arbeit zuteil werden ließen.

Inhalt.

Übersicht . . . . . Seite 3
Hydrodynamische Grundgleichungen . . . . . „ 5
Quellen und Senken . . . . . „ 8
Der Quellring.
A. Das Potential des Quellringes . . . . . „ 12
B. Die Stromfunktion des Quellringes . . . . . „ 21
Überlagerung von Quellring- und Parallelströmung . . . . . „ 28
Anwendung auf die Potentialströmung in Düsen von Becher-Turbinen „ 39
Literaturangabe . . . . . „ 50
Lebenslauf . . . . . „ 51